أكثروا من الصلاة على النبي

made by Mansy

صلى ع النبى وإدعيلى دعوة حلوة

#دفعة المنوفية 2022

#قناة تالتة ثانوى 2022

الجـــزء الخـــاص بالإجـــابات

2022

التفـاضل و التكـامل

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

3 ثانوى

المعاصر

الرياضيات البحتة

التفاضل و التكامل

الجزء الخاص بالإجابات

3

ثانوى

إعداد نخبة من خبراء التعليم

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى-الفجالة
تليفون ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com
الخط السادس ١٥٠١٤

الرياضيات

الوحدة 1

المشتقة وتطبيقاتها

اختبار ذاتي 1

1 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

2 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

3 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

4 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

5 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

6 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

7 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

8 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

9 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

10 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

11 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

12 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

13 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

14 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

15 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

16 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

17 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

18 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

19 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

20 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

21 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

22 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

23 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

24 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

25 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

26 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

27 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

28 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

29 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

30 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

31 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

32 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

33 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

34 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

35 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

36 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

37 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

38 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

39 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

40 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

41 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

42 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

43 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

44 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

45 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

46 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

47 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

48 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

49 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

50 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

51 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

52 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

53 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

54 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

55 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

56 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

57 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

58 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

59 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

60 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

61 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

62 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

63 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

64 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

65 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

66 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

67 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

68 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

69 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

70 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

71 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

72 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

73 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

74 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

75 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

76 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

77 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

78 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

79 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

80 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

81 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

82 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

83 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

84 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

85 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

86 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

87 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

88 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

89 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

90 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

91 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

92 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

93 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

94 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

95 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

96 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

97 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

98 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

99 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

100 أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

إجابات تمارين 2

أولاً مسائل على الاشتقاق الضمني

(أ) [illegible] (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

[illegible]

(ب) نفرض أن (س) هو قياس الزاوية بالتقدير الستيني ، (هـ) هو قياس نفس الزاوية بالتقدير الدائري

[illegible]

[illegible]

② س^{٢} + ٣ ص^{٢} − ٥ = ٠ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٢ س + ٦ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س}{٣ ص}$

③ (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٢ (س − ٣) + ٢ (ص + ٢) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-(س - ٣)}{(ص + ٢)}$ = $\frac{٣ - س}{ص + ٢}$

④ س^{٣} + ص^{٣} − ٧ س + ٤ ص = ٨

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ − ٧ + ٤ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

(٣ ص^{٢} + ٤) $\frac{ءص}{ءس}$ + (٣ س^{٢} − ٧) = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٧ - ٣ س^{٢}}{٣ ص^{٢} + ٤}$

⑤ س^{٣} + ص^{٣} − ٢ س + ٣ ص^{٢} = ٨

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢ + ٦ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٣ ص^{٢} + ٦ ص) = ٢ − ٣ س^{٢}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ - ٣ س^{٢}}{٣ ص^{٢} + ٦ ص}$

⑥ س^{٢} + ٩ ص^{٢} − ٦ س ص = ٤

∴ (س − ٣ ص)^{٢} = ٤

∴ س − ٣ ص = ± ٢ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ١ − ٣ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠   ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٣}$

⑦ س^{٢} − ٥ س ص + ص^{٢} = ٤ س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − ٥ ص − ٥ س $\frac{ءص}{ءس}$

+ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤

∴ (٢ ص − ٥ س) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ − ٢ س + ٥ ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٤ - ٢ س + ٥ ص}{٢ ص - ٥ س}$

⑧ س ص = ١٠ (س + ص)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص + س $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٠ + ١٠ $\frac{ءص}{ءس}$

∴ (س − ١٠) $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٠ − ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١٠ - ص}{س - ١٠}$

⑨ س^{٢} ص^{٢} = ١٠٠ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ س^{٢} × ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ص^{٢} × ٢ س = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٢ ص^{٢} س}{٢ س^{٢} ص}$ = $\frac{-ص}{س}$

⑩ س^{٢} ص + ص^{٢} س = ٢٥

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س ص + س^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ + ص^{٢}

+ ٢ س ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ (س^{٢} + ٢ س ص) $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢ س ص − ص^{٢}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ص (٢ س + ص)}{س (س + ٢ ص)}$

⑪ س^{ن} ص^{ن} = أ^{ن} (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ س^{ن} × ن ص$^{ن-١}$ $\frac{ءص}{ءس}$ + ص^{ن}

× ن س$^{ن-١}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ص^{ن} × ن س^{ن-١}}{س^{ن} × ن ص^{ن-١}}$

= $-\left(\frac{ص}{س}\right)^{ن} × \left(\frac{س}{ص}\right)^{ن-١}$ = $\frac{-ص}{س}$

⑫ س^{ن} + ص^{ن} = أ^{ن} (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ن س$^{ن-١}$ + ن ص$^{ن-١}$ $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ن س^{ن-١}}{ن ص^{ن-١}}$ = $-\left(\frac{س}{ص}\right)^{ن-١}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٣ + جا ص جا ٢ س) = ٢ جتا ص جتا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ جتا ص جتا ٢ س}{٣ + جا ص جا ٢ س}$

⑫ س جتا ص + ص جتا س = ١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ جتا ص + س (− جا ص) $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ جتا س

+ ص (− جا س) = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− س جا ص + جتا س)

= − جتا ص + ص جا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ص جا س - جتا ص}{جتا س - س جا ص}$

⑬ س^{٢} جا ص − ص^{٢} جا س = ٩

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س جا ص + س^{٢} جتا ص $\frac{ءص}{ءس}$

− ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$. جا س − ص^{٢} جتا س = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س^{٢} جتا ص − ٢ ص جا س)

= ص^{٢} جتا س − ٢ س جا ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ص^{٢} جتا س - ٢ س جا ص}{س^{٢} جتا ص - ٢ ص جا س}$

⑭ س ظتا ص = ص ظتا س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ظتا ص + س (− قتا^{٢} ص) $\frac{ءص}{ءس}$

= $\frac{ءص}{ءس}$ ظتا س + ص (− قتا^{٢} س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− س قتا^{٢} ص − ظتا س)

= − ظتا ص − ص قتا^{٢} س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ظتا ص + ص قتا^{٢} س}{س قتا^{٢} ص + ظتا س}$

⑮ ظا ٢ س + ظتا ص = س ص

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ قا^{٢} ٢ س + (− قتا^{٢} ص) $\frac{ءص}{ءس}$ = ص + س $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س + قتا^{٢} ص) = ٢ قا^{٢} (٢ س) − ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ قا^{٢} (٢ س) - ص}{س + قتا^{٢} ص}$

⑯ جا^{٢} س + ٢ جتا ص + س ص = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ جا س جتا س + ٢ (− جا ص) $\frac{ءص}{ءس}$

+ ص + س $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س − ٢ جا ص) = − ص − ٢ جا س جتا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{- ص - ٢ جا س جتا س}{س - ٢ جا ص}$

⑰ ص قا س + ظا س + س^{٢} ص = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ قا س + ص قا س ظا س + قا^{٢} س

+ ٢ س ص + س^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (قا س + س^{٢})

= − ص قا س ظا س − قا^{٢} س − ٢ س ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{- ص قا س ظا س - قا^{٢} س - ٢ س ص}{قا س + س^{٢}}$

⑱ أ جتا ب س + ب جا أ ص = جـ

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ − أ ب جا ب س + أ ب جتا أ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{جا ب س}{جتا أ ص}$

٣

① ٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} = ٥ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٤ س + ٦ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٢ س}{٣ ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{[illegible]}$ = $\frac{٢}{٣}$

① [illegible]

∴ [illegible] (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ [illegible] $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = [illegible] $\left(\frac{س}{ص}\right)$

② س^{٢} + ص^{٢} = ٢ س^{٢} − ٣ ص^{٢} [illegible]

∴ ٦ س^{٢} − ٨ ص^{٢} = صفر

∴ ٣ س^{٢} − ٤ ص^{٢} = صفر (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٦ س − ٨ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٦ س}{٨ ص}$ = $\frac{٣}{٤}\left(\frac{س}{ص}\right)$

③ $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ٤ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$ $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س^{-\frac{١}{٢}}}{ص^{-\frac{١}{٢}}}$ = $\frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

④ ص + $\sqrt{س ص}$ = ٢ س^{٢} (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{١}{٢\sqrt{س ص}}$ × [س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص] = ٤ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{س}{٢\sqrt{س ص}}$ $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ص}{٢\sqrt{س ص}}$ = ٤ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٤ س - \frac{ص}{٢\sqrt{س ص}}}{١ + \frac{س}{٢\sqrt{س ص}}}$

= $\frac{٨ س \sqrt{س ص} - ص}{٢\sqrt{س ص} + س}$

⑤ جا ٢ س = ظا ٢ ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ جتا ٢ س = ٢ قا^{٢} ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ جتا ٢ س}{٢ قا^{٢} ٢ ص}$

⑥ س جا ص = ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ س جتا ص $\frac{ءص}{ءس}$ + جا ص = $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س جتا ص − ١) = − جا ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{جا ص}{١ - س جتا ص}$

⑦ [illegible] (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

[illegible]

⑧ س ص + جا ص = ٠ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص + س $\frac{ءص}{ءس}$ + جتا ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س + جتا ص) = − ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ص}{س + جتا ص}$

⑨ ٥ ص + جا ص = س^{٢} (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٥ $\frac{ءص}{ءس}$ + جتا ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ س}{٥ + جتا ص}$

⑩ جا س جا ص = $\frac{١}{٢}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ جا س جتا ص $\frac{ءص}{ءس}$ + جا ص جتا س = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-جا ص جتا س}{جا س جتا ص}$ = − ظا ص ظتا س

⑪ ٢ ص = ظا ٢ س جا ص

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = [illegible]

[illegible]

② س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢} = ١١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − ٢ س $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢ ص + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ ص − ٢ س) = ٢ ص − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = [illegible]

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{[illegible]}$ = $\frac{٧}{٨}$

③ س ص^{٢} = ٢ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص^{٢} + س (٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$) = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ص^{٢}}{٢ س ص}$ = $\frac{-ص}{٢ س}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{[illegible]}$ = $\frac{١}{٤}$

④ س^{٤} − ٢ س^{٢} ص^{٢} + س ص^{٣} = ١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٤ س^{٣} − ٤ س ص^{٢} − ٢ س^{٢} (٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$)

+ س (٣ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$) + ص^{٣} = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− ٤ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢})

= − ص^{٣} + ٤ س ص^{٢} − ٤ س^{٣}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = [illegible]

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{[illegible]}$ = ٣

⑤ س^{٢} − س ص + ص^{٢} = ٢٦

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − س $\frac{ءص}{ءس}$ − ص + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− س + ٢ ص) = ص − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = [illegible]

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{[illegible]}$ [illegible]

⑥ س $\sqrt{ص}$ + ص $\sqrt{س}$ = ٦

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

[illegible]

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{[illegible]}$ = [illegible]

⑦ [illegible] (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

[illegible]

⑧ [illegible]

[illegible]

① س^{٢} − ٣ س ص + ص^{٢} = ٥

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − ٢ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٢ ص − ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٢ س + ٢ ص) = ٢ ص − ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٢ س − ٢ ص}}{\text{٢ س + ٢ ص}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١،١)}$ = ١

∴ ظاهـ = ١ ∴ ق (د هـ) = ٤٥°

② س^{٢} − س^{٢} ص − س − ٢ ص = ٠

∴ ٢ س^{١} − س^{٢} $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٢ س ص − ١ − ٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (−٢ − س^{٢}) = ٢ س ص + ١ − ٢ س^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٢ س ص + ١ − ٢ س}^{٢}}{\text{−٢ − س}^{٢}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١،١)}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ظاهـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق (د هـ) = ٢٦٫٥٦°

③ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ − $\frac{\text{ءص}}{\text{س}}$ = ٢ بالضرب × (س ص)

∴ س^{٢} − ءص^{٢} = ٢ س ص

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − ٨ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٢ ص

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٢ س + ٨ ص) = ٢ س − ٢ ص

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٢ س − ٢ ص}}{\text{٢ س + ٨ ص}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١،-١)}$ = −١

∴ ظاهـ = −١ ∴ ق (د هـ) = ١٣٥°

④ جا ٢ س = ظا ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ جتا ٢ س = قا^{٢} ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٢ جتا ٢ س}}{\text{قا}^{٢}\text{ ص}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(\frac{\pi}{٤}،\frac{\pi}{٤})}$ = صفر

∴ ظاهـ = صفر ∴ ق (د هـ) = صفر°

ثالثاً مسائل على الاشتقاق البارامترى

٥

① س = ٥ ن + ٢ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٥

، ص = ١٦ ن^{٢} + ٩ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٣٢ ن

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = $\frac{\text{٣٢ ن}}{٥}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{٥،٠}$ = $\frac{٥ \times ٣٢}{٥}$ = ٣٢

② س = ٢ ن^{٢} ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٤ ن

، ص = ٢ ن^{٣} ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ١٢ ن^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = $\frac{\text{١٢ ن}^{٢}}{\text{٤ ن}}$ = ٣ ن

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{٢،٠}$ = ٦

③ س = ٤ ن ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٤

، ص = $\frac{١}{ن}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = $\frac{-١}{ن^{٢}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = $\frac{-١}{ن^{٢}}$ ÷ ٤ = $\frac{-١}{٤ن^{٢}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{٢،٠}$ = $\frac{-١}{٦٤}$

④ س = (ن + ٧) (ن − ٢) منها س = ن^{٢} + ٥ ن − ١٤

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٢ ن + ٥

ص = (ن^{٢} + ١) (ن − ٢)

منها ص = ن^{٣} − ٢ ن^{٢} + ن − ٢

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٣ ن^{٢} − ٤ ن + ١

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = $\frac{\text{٣ ن}^{٢}\text{ − ٤ ن + ١}}{\text{٢ ن + ٥}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{١،٠}$ = $\frac{٣ - ٤ + ١}{٢ + ٥}$ = صفر

⑤ س = $\sqrt{\text{٣ ن − ٢}}$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = $\frac{٣}{\text{٢}\sqrt{\text{٣ ن − ٢}}}$

، ص = $\sqrt{\text{٤ ن + ١}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = $\frac{٤}{\text{٢}\sqrt{\text{٤ ن + ١}}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = $\frac{٣}{\text{٢}\sqrt{\text{٣ ن − ٢}}}$ ÷ $\frac{٤}{\text{٢}\sqrt{\text{٤ ن + ١}}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٣}{\text{٢}\sqrt{\text{٣ ن − ٢}}}$ × $\frac{\text{٢}\sqrt{\text{٤ ن + ١}}}{٤}$

= $\frac{٣}{\text{٢}\sqrt{\text{٣ ن − ٢}}}$ × $\frac{\text{٢}\sqrt{\text{٤ ن + ١}}}{٤}$

= $\frac{\text{٣}\sqrt{\text{٤ ن + ١}}}{\text{٨}\sqrt{\text{٣ ن − ٢}}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{٠،٢}$ = $\frac{\text{٣}\sqrt{\text{٤ × ٢ + ١}}}{\text{٨}\sqrt{\text{٣ × ٢ − ٢}}}$ = $\frac{٣}{٤}$

٦

① س = ٣ جتا ٢ θ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = −٦ جا ٢ θ

، ص = ٤ جا ٣ θ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ١٢ جتا ٣ θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{١٢ جتا ٣ θ}}{\text{−٦ جا ٢ θ}}$ = $\frac{\text{−٢ جتا ٣ θ}}{\text{جا ٢ θ}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٤}،٠}$ = $\frac{\text{−٢ جتا}\frac{٣\pi}{٤}}{\text{جا}\frac{٢\pi}{٤}}$ = $\sqrt{٢}$

② س = جا ٢ π θ

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = ٢ π جتا ٢ π θ ، ص = جا ٣ π θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = −٣ π جا ٣ π θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{−٣ π جا ٣ π θ}}{\text{٢ π جا ٢ π θ}}$

= −$\frac{٣}{٢}$ ظا ٢ π θ

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{١}{٢}،٠}$ = −$\frac{٣}{٢}$ ظا π = −$\sqrt{٣}$

③ س = ٥ جا^{٢} θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ١٠ جا θ × −جا θ = −١٠ جا θ جا θ

، ص = ٤ جا^{٢} θ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ٨ جا θ × جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{٨ جا θ جا θ}}{\text{−١٠ جا θ جا θ}}$ = $\frac{-٤}{٥}$

① س = ٢ جا^{٢} θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ٢ جا^{٢} θ × −جا θ

= −٢ جا^{٢} θ جا θ

، ص = ١ جا^{٢} θ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ٢ جا^{٢} θ × جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{٢ جا}^{٢}\text{ θ جا θ}}{\text{−٢ جا}^{٢}\text{ θ جا θ}}$ = −١

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٢}،٠}$ = $\frac{-١}{١}$ = −١

④ س = ٥ + جا^{٢} ٢ θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ٢ جا ٢ θ جتا ٢ θ × ٢

= ٤ جا ٢ θ جتا ٢ θ

، ص = ١ − جتا ٢ θ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = −٢ جا ٢ θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{−٢ جا ٢ θ}}{\text{٤ جا ٢ θ جتا ٢ θ}}$ = $\frac{-١}{\text{٢ جتا ٢ θ}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٤}،٠}$ = $\frac{-١}{٢ \times \frac{١}{٢}}$ = $\frac{-١}{٢}$

⑤ س = جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = جتا θ ، ص = جا^{٢} θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ θ جتا θ}}{\text{جتا θ}}$ = جا^{٢} θ

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٤}،٠}$ = $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

⑥ س = ظا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = قا^{٢} θ ، ص = −جا^{٢} θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{−جا}^{٢}\text{ θ}}{\text{قا}^{٢}\text{ θ}}$ = −جا^{٢} θ

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٤}،٠}$ = −$\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = −$\frac{١}{٢}$

⑦ س = ١ + جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ١ + جتا θ ، ص = −جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{−جا θ}}{\text{١ + جتا θ}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٢}،٠}$ = $\frac{-١}{١ + ٠}$ = −١

⑧ س = جا θ + جا ٢ θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = جتا θ + ٢ جتا ٢ θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{جتا θ + ٢ جتا ٢ θ}}{\text{−جا θ − ٢ جا ٢ θ}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٢}،٠}$ = $\frac{\frac{١}{٢} + ٢\left(-\frac{١}{٢}\right)}{-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$

⑨ س = ٣ جتا θ − ٢ جا^{٣} θ

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = −٣ جا θ + ٦ جا^{٢} θ جتا θ

، ص = ٣ جا θ − ٢ جا^{٣} θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ٣ جتا θ − ٦ جا^{٢} θ جتا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٣ جتا θ − ٦ جا}^{٢}\text{ θ جتا θ}}{\text{−٣ جا θ + ٦ جا}^{٢}\text{ θ جتا θ}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٢}،٠}$ = $\frac{\text{صفر − صفر}}{\text{−٣ + ٦ × صفر × ١}}$ = صفر

⑩ س = ١ (جتا θ + θ جا θ)

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = ١ (−جا θ + جا θ + θ جتا θ)

= ١ θ جتا θ

، ص = ١ (جا θ − θ جتا θ)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ١ (جتا θ − جتا θ + θ جا θ)

= ١ θ جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{١ θ جا θ}}{\text{١ θ جتا θ}}$ = ظا θ

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٦}،٠}$ = $\frac{١}{\frac{١}{\sqrt{٣}}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

٧

① بوضع : ص = ٤ س^{٢} − ٩ س^{٢} + ٥

، ع = ٣ س^{٢} + ٧

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١٢ س^{٢} − ١٨ س

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٦ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ÷ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{١٢ س}^{٢}\text{ − ١٨ س}}{\text{٦ س}}$

= ٢ س − ٣

② بوضع : ص = (س + ٣) (س − ٢)

= س^{٢} + س − ٦

، ع = $\frac{\text{س − ٢}}{\text{س + ٢}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س + ١

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(س + ٢) × ١ − (س − ٢) × ١}}{\text{(س + ٢)}^{٢}}$

= $\frac{٥}{\text{(س + ٢)}^{٢}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ÷ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = (٢ س + ١) − $\frac{٥}{\text{(س + ٢)}^{٢}}$

= $\frac{١}{٥}$ (٢ س + ١) (س + ٢)^{٢}

③ بوضع : ص = $\frac{\text{س + ١}}{\text{س − ١}}$ ، ع = $\sqrt{\text{٢ س + ١}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(س − ١) (١) − (س + ١) (١)}}{\text{(س − ١)}^{٢}}$ = $\frac{-٢}{\text{(س − ١)}^{٢}}$

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٢}{\text{٢}\sqrt{\text{٢ س + ١}}}$ = $\frac{١}{\sqrt{\text{٢ س + ١}}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ÷ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-٢}{\text{(س − ١)}^{٢}}$ ÷ $\frac{١}{\sqrt{\text{٢ س + ١}}}$

= $\frac{-٢\sqrt{\text{٢ س + ١}}}{\text{(س − ١)}^{٢}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right)_{\text{س}=٤}$ = $\frac{\text{−٢}\sqrt{٢ \times ٤ + ١}}{(٤ - ١)^{٢}}$ = $\frac{-٢}{٣}$

④ بوضع : ص = س − جا س ، ع = ١ − جتا س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١ − جتا س ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = جا س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ÷ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{١ − جتا س}}{\text{جا س}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right)_{\text{س}=\frac{\pi}{٣}}$ = $\frac{١ - \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{١}{\text{١٠ × ٢}\sqrt{\text{٢ θ + ١}}}$ = $\frac{٢}{\text{١٠ × ٢}\sqrt{\text{٢ θ + ١}}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$

= $\frac{٢}{\text{١٠ × ٢}\sqrt{\text{٢ θ + ١}}}$ ÷ $\frac{٢}{\text{٢}\sqrt{\text{٢ θ + ١}}}$

= $\frac{\text{٢}\sqrt{\text{٢ θ + ١}} - ٢}{\text{١٠ × ٢}\sqrt{\text{٢ θ + ١}}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{θ}=٠}$ = $\frac{\text{٢}\sqrt{٢ \times ٠ + ١} - ٢}{\text{١٠ × ٢}\sqrt{٢ \times ٠ + ١}}$ = $\frac{٥}{٢}$

٦

① س = ٢ جا ٢ θ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = −٦ جا ٢ θ

، ص = ٤ جا ٣ θ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ١٢ جتا ٣ θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{١٢ جتا ٣ θ}}{\text{−٦ جا ٢ θ}}$ = $\frac{\text{−٢ جتا ٣ θ}}{\text{جا ٢ θ}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٤}،٠}$ = $\frac{\text{−٢ جتا}\frac{٣\pi}{٤}}{\text{جا}\frac{٢\pi}{٤}}$ = $\sqrt{٢}$

② س = جا ٢ π θ

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = ٢ π جتا ٢ π θ ، ص = جا ٣ π θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = −٣ π جا ٣ π θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{−٣ π جا ٣ π θ}}{\text{٢ π جا ٢ π θ}}$

= −$\frac{٣}{٢}$ ظا ٢ π θ

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{١}{٢}،٠}$ = −$\frac{٣}{٢}$ ظا π = −$\sqrt{٣}$

③ س = ٥ جا^{٣} θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ١٠ جا θ × −جا θ = −١٠ جا θ جا θ

، ص = ٤ جا^{٢} θ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ٨ جا θ × جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{٨ جا θ جا θ}}{\text{−١٠ جا θ جا θ}}$ = $\frac{-٤}{٥}$

① س = ٢ جا^{٢} θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ٢ جا^{٢} θ × −جا θ

= −٢ جا^{٢} θ جا θ

، ص = ١ جا^{٢} θ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ٢ جا^{٢} θ × جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{٢ جا}^{٢}\text{ θ جا θ}}{\text{−٢ جا}^{٢}\text{ θ جا θ}}$ = −١

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٢}،٠}$ = $\frac{-١}{١}$ = −١

④ س = ٥ + جا^{٢} ٢ θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ٢ جا ٢ θ جتا ٢ θ × ٢

= ٤ جا ٢ θ جتا ٢ θ

، ص = ١ − جتا ٢ θ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = −٢ جا ٢ θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{−٢ جا ٢ θ}}{\text{٤ جا ٢ θ جتا ٢ θ}}$ = $\frac{-١}{\text{٢ جتا ٢ θ}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٤}،٠}$ = $\frac{-١}{٢ \times \frac{١}{٢}}$ = $\frac{-١}{٢}$

⑤ س = جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = جتا θ ، ص = جا^{٢} θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ θ جتا θ}}{\text{جتا θ}}$ = جا^{٢} θ

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٤}،٠}$ = $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

⑥ س = ظا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = قا^{٢} θ ، ص = −جا^{٢} θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{−جا}^{٢}\text{ θ}}{\text{قا}^{٢}\text{ θ}}$ = −جا^{٢} θ

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٤}،٠}$ = −$\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = −$\frac{١}{٢}$

⑦ س = ١ + جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ١ + جتا θ ، ص = −جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{−جا θ}}{\text{١ + جتا θ}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٢}،٠}$ = $\frac{-١}{١ + ٠}$ = −١

⑧ س = جا θ + جا ٢ θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = جتا θ + ٢ جتا ٢ θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = $\frac{\text{جتا θ + ٢ جتا ٢ θ}}{\text{−جا θ − ٢ جا ٢ θ}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٢}،٠}$ = $\frac{\frac{١}{٢} + ٢\left(-\frac{١}{٢}\right)}{-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$

⑨ س = ٣ جتا θ − ٢ جا^{٣} θ

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = −٣ جا θ + ٦ جا^{٢} θ جتا θ

، ص = ٣ جا θ − ٢ جا^{٣} θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ٣ جتا θ − ٦ جا^{٢} θ جتا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٣ جتا θ − ٦ جا}^{٢}\text{ θ جتا θ}}{\text{−٣ جا θ + ٦ جا}^{٢}\text{ θ جتا θ}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٢}،٠}$ = $\frac{\text{صفر − صفر}}{\text{−٣ + ٦ × صفر × ١}}$ = صفر

⑩ س = ١ (جتا θ + θ جا θ)

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = ١ (−جا θ + جا θ + θ جتا θ)

= ١ θ جتا θ

، ص = ١ (جا θ − θ جتا θ)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = ١ (جتا θ − جتا θ + θ جا θ)

= ١ θ جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{١ θ جا θ}}{\text{١ θ جتا θ}}$ = ظا θ

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\frac{\pi}{٦}،٠}$ = $\frac{١}{\frac{١}{\sqrt{٣}}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ثالثاً مسائل متنوعة

٨

① −١ ② ١٨ ③ $\frac{٢}{٨}$ ④ ١٠ ⑤ ٦ ⑥ $\frac{-١}{١٢}$

٩

① (د) ② (د) ③ (د) ④ (ب) ⑤ (د)
⑥ (أ) ⑦ (أ) ⑧ (ب) ⑨ (ب) ⑩ (ب)
⑪ (جـ) ⑫ (جـ) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (د)
⑯ (جـ) ⑰ (ب) ⑱ (جـ) ⑲ (ب) ⑳ (جـ)
㉑ (د) ㉒ (جـ) ㉓ (أ) ㉔ (ب) ㉕ (د)
㉖ (د) ㉗ (د) ㉘ (جـ) ㉙ (جـ) ㉚ (ب)
㉛ (د) ㉜ (جـ) ㉝ (ب) ㉞ (جـ) ㉟ (جـ)
㊱ (ب) ㊲ (د)

١٠

ص = (س^{٢} + ٢)^{٢} بالاشتقاق بالنسبة إلى ص

∴ ١ = ٧ (س^{٢} + ٢)^{٦} × ٣ س^{٢} × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$ = $\frac{١}{\text{٢١ س}^{٢}\text{ (س}^{٢}\text{ + ٢)}^{٦}}$ × $\frac{\text{(س}^{٢}\text{ + ٢)}^{٧}}{\text{(س}^{٢}\text{ + ٢)}}$

= $\frac{\text{(س}^{٢}\text{ + ٢)}^{٦}}{\text{٢١ س}^{٢}\text{ (س}^{٢}\text{ + ٢)}^{٦}}$ = $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ٢}}{\text{٢١ س}^{٢}\text{ ص}}$

١١

س = (ص^{٢} − ١)^{٥} (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

١ = ٥ (ص^{٢} − ١)^{٤} × ٢ ص^{٢} $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{\text{١٥ ص}^{٢}\text{ (ص}^{٢}\text{ − ١)}^{٤}}$ × $\frac{\text{(ص}^{٢}\text{ − ١)}^{٥}}{\text{(ص}^{٢}\text{ − ١)}}$

= $\frac{\text{ص}^{٢}\text{ − ١}}{\text{١٥ ص}^{٢}\text{ (ص}^{٢}\text{ − ١)}^{٤}}$ = $\frac{\text{ص}^{٢}\text{ − ١}}{\text{١٥ س ص}^{٢}}$

١٢

$\frac{٢}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}}}$ = $\frac{٥}{٢}$

$\sqrt{\text{س}}$ + $\sqrt{\text{ص}}$ = $\frac{٢}{٥}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{−س}^{-\frac{١}{٢}}}{\text{ص}^{-\frac{١}{٢}}}$ = $\frac{-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}}$ ∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

١٣

(ص − ١)^{٢} − (س − ١)^{٢} = ١^{٢}

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٢ (ص − ١)^{١} × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٢ (س − ١)^{١} = صفر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(س − ١)}^{١}}{\text{(ص − ١)}^{١}}$ = $\left(\frac{\text{س − ١}}{\text{ص − ١}}\right)^{١}$

١٤

ص^{٢} + ٢ ١ س − ١^{٢} = ٠ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٢ ١ = صفر ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-١}{\text{ص}}$

∴ الطرف الأيمن = $\left(\frac{-١}{\text{ص}}\right)^{٢}$ + $\frac{٢}{\text{ص}}$ $\left(\frac{-١}{\text{ص}}\right)$

= $\frac{١^{٢} - ٢ ١ \text{ س}}{\text{ص}^{٢}}$ = $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}$ = ١

١٥

ص^{٢} = س + $\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١ + $\frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$

بالضرب × $\left(\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}\right)$

٢ ص $\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$ + س

٢ ص $\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ص^{٢}

∴ ٢ $\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ص

١٦

ص = $\left(\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س + ٢}}\right)^{٢}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}\left(\frac{\text{س}^2}{\text{س}+2}\right)^{\text{ن}-1}$

$= \left[\frac{(\text{س}^2+2)(2\text{س}) - (\text{س}^2)(2\text{س})}{(\text{س}^2+2)^2}\right]$

$= \text{ن}\left(\frac{\text{س}^2}{\text{س}^2+2}\right)^{\text{ن}-1}\left[\frac{8\text{س}}{(\text{س}^2+2)^2}\right]$

$= \text{ن}\left(\frac{\text{س}^2}{\text{س}^2+2}\right)^{\text{ن}}\left(\frac{\text{س}^2+2}{\text{س}^2}\right)\left(\frac{8\text{س}}{(\text{س}^2+2)^2}\right)$

$= \text{ن}\,\text{ص} \times \frac{8}{\text{س}^2+2} = \frac{8\text{ن}\,\text{س}\,\text{ص}}{\text{س}^2+2}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{8\text{ن}\,\text{س}\,\text{ص}}{\text{س}^2+2}$

١٧

$\text{س} = 2\text{ع}^3 - 5\text{ع}^2 + 12$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = 6\text{ع}^2 - 10\text{ع}$

$\text{ص} = 2\text{ع}^3 + 5\text{ع} + 1$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = 6\text{ع}^2 + 5$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = \frac{6\text{ع}^2+5}{6\text{ع}^2-10\text{ع}}$

في حالة المماس أفقي :

$\therefore$ الميل $= 0$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

$\therefore \frac{6\text{ع}^2+5}{6\text{ع}^2-10\text{ع}} = 0$ $\therefore \text{ع} = \frac{5}{6}$

في حالة المماس رأسي :

الميل غير معرف

$\therefore 6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 6 = 0$

$\therefore 3\text{ع}^2 - 5\text{ع} - 3 = 0$

$\therefore (3\text{ع}+1)(\text{ع}-3) = 0$

$\therefore \text{ع} = -\frac{1}{3}$ أو $\text{ع} = 3$

١٨

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءو}} = 3\text{و}^2 - 14\text{و} + 16$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءو}} = 6\text{و}^2 - 6\text{و}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}/\text{ءو}}{\text{ءس}/\text{ءو}} = \frac{6\text{و}^2-6\text{و}}{3\text{و}^2-14\text{و}+16}$

في حالة المماس رأسي :

$\therefore$ الميل غير معرف $\therefore 3\text{و}^2 - 14\text{و} + 16 = 0$

$\therefore (3\text{و}-8)(\text{و}-2) = 0$

$\therefore \text{و} = \frac{8}{3}$ أو $\text{و} = 2$

في حالة المماس أفقي :

$\therefore$ الميل $= 0$ $\therefore 6\text{و}^2 - 6\text{و} = 0$

$\therefore 6\text{و}(\text{و}-1) = 0$ $\therefore \text{و} = 0$ أو $\text{و} = 1$

١٩

$\text{س} = (1 - \text{ص})(1 + \text{ص} + \text{ص}^2)$

$\therefore \text{س} = 1 - \text{ص}^3$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = -3\text{ص}^2 \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-1}{3\text{ص}^2}$

٢٠

$\text{جاس جاص} - \text{جاص جاس} = 1$

$\text{جا}(\text{س} - \text{ص}) = 1$ $\therefore \text{س} - \text{ص} = \frac{\pi}{2}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore 1 - \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$

٢١

$\text{جا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{ص} = \frac{1}{2}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$2\,\text{جاس جتاس} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 2\,\text{جاص جتاص}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2\,\text{جاس جتاس}}{2\,\text{جاص جتاص}} = \frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{جا}2\text{ص}}$

$= \text{جا}2\text{ص} \div \text{جا}2\text{س}$

٢٢

$\text{س} = \text{جا}(\text{س ص})$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = \text{جتا}(\text{س ص})\left(\text{ص} + \text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$

$1 = \text{ص جتا}(\text{س ص}) + \text{س جتا}(\text{س ص})\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1 - \text{ص جتا}(\text{س ص})}{\text{س جتا}(\text{س ص})}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1 - \text{ص جتا}(\text{س ص})}{\text{س جتا}(\text{س ص})}$

٢٣

① نفرض $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ دالة زوجية

$\therefore \text{د}(-\text{س}) = \text{د}(\text{س})$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

$\therefore \text{د}'(-\text{س}) \times -1 = \text{د}'(\text{س})$

$\therefore \text{د}'(-\text{س}) = -\text{د}'(\text{س})$

$\therefore$ $\text{د}'(\text{س})$ تمثل دالة فردية

② نفرض $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ دالة فردية

$\therefore \text{د}(-\text{س}) = -\text{د}(\text{س})$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

$\therefore \text{د}'(-\text{س}) \times -1 = -\text{د}'(\text{س})$

$\therefore \text{د}'(-\text{س}) = \text{د}'(\text{س})$

$\therefore$ $\text{د}'(\text{س})$ تمثل دالة زوجية

٢٤

① (د) ② (ا) ③ (ا) ④ (د) ⑤ (ا)

⑥ (د) ⑦ (ا) ⑧ (د) ⑨ (د)

إرشادات لحل رقم ٤

① $\because \text{د}(\text{س}) = \text{ن}(\text{س}^2)$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{ن}'(\text{س}^2) \times 2\text{س}$

، عند س $= 2$ $\therefore \text{د}'(2) = \text{ن}'(4) \times 4$

$\therefore \frac{\text{د}'(2)}{\text{ن}'(4)} = 4$

② $\because$ الدالة ن هي الدالة العكسية للدالة د

$\therefore \text{ن}[\text{د}(\text{س})] = \text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore \text{ن}'[\text{د}(\text{س})] \times \text{د}'(\text{س}) = 1$

وعند س $= 2$

$\therefore \text{ن}'[\text{د}(2)] \times \text{د}'(2) = 1$

$\therefore \text{ن}'(\text{س}) \times 2 = 1$ $\therefore \text{ن}'(\text{س}) = \frac{1}{2}$

③ $\because \text{ص} = \text{د}(\text{قاس})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س} \times \text{د}'(\text{قاس})$

عند س $= \frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2 \times \text{د}'(1) = 2 \times 2 = 4$

، $\because \text{ع} = \text{ن}(\text{قاس})$

$\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{قاس قاس} \times \text{ن}'(\text{قاس})$

، عند س $= \frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \sqrt{2} \times \text{ن}'(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ ، عند س $= \frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = 4 \times \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

④ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \dots}}$ بالتربيع

$\therefore \text{ص}^2 = \text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \dots}}$

$\therefore \text{ص}^2 = \text{س} + \text{ص}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

منها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(2\text{ص} - 1) = 1$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\text{ص} - 1}$

⑤ $\text{س} = \sqrt{\text{قاص} + \sqrt{\text{قاص} + \sqrt{\text{قاص} + \dots}}}$ بالتربيع

$\therefore \text{س}^2 = \text{قاص} + \sqrt{\text{قاص} + \sqrt{\text{قاص} + \dots}}$

$\therefore \text{س}^2 = \text{قاص} + \text{س}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore 2\text{س} = \text{قا}^2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 1$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2\text{س} - 1}{\text{قا}^2\text{ص}} = (2\text{س} - 1)\,\text{جتا}^2\text{ص}$

⑥ $\because (\text{د} \circ \text{د})(\text{س}) = \text{د}[\text{د}(\text{س})] = \text{د}(2\text{س})$

$= 4\text{س}^2$

$\therefore (\text{د} \circ \text{د})'(\text{س}) = 8\text{س}$

$\therefore (\text{د} \circ \text{د})'(1) = 8$

⑦ $\because \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}^2} = \frac{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}}{\frac{\text{ءس}^2}{\text{ءس}}} = \frac{2\text{س} + 5}{2\text{س}}$

، عند س $= 1$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}^2} = \frac{7}{2}$

⑧ $\because 1 + \text{قا}^2\text{ص} = \text{قا}^2\text{ص}$ $\therefore \text{قا}^2\text{ص} = \text{قا}^2\text{ص} - 1$

$\therefore \text{قا}^2\text{ص} = \text{س}^2 - 1$ $\therefore \text{قاص} = \pm\sqrt{\text{س}^2 - 1}$

، $\because \text{ص} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ $\therefore \text{قاص} = -\sqrt{\text{س}^2 - 1}$

، $\because \text{س} = \text{قاص}$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \text{قاص قاص} = -\text{س}\sqrt{\text{س}^2 - 1}$

⑨ $\text{ص} = \text{د}(\text{د}(\text{د}(\text{س})))) \times \text{د}(\text{د}(\text{س})) \times \text{د}(\text{س})$

$\therefore \text{ص}(1) = \text{د}(\text{د}(\text{د}(1))) \times \text{د}(\text{د}(1)) \times \text{د}(1)$

$= \text{د}(\text{د}(1)) \times \text{د}(1) \times \text{د}(1)$

$= \text{د}(1) \times \text{د}(1) \times \text{د}(1)$

$= 3 \times 3 \times 3 = 27$

٢٥

$\text{س} = \text{جاص}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = \text{جتاص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{جتاص}}$ $(\because \text{جتاص} = \sqrt{1 - \text{جا}^2\text{ص}})$

$= \frac{1}{\sqrt{1 - \text{جا}^2\text{ص}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{س}^2}}$

٢٦

$\text{ص} = \text{د}(\text{ن}(\text{س}))$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{ن}(\text{س})) \times \text{ن}'(\text{س})$ (١)

$\because \text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}$ ، $\text{ن}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$

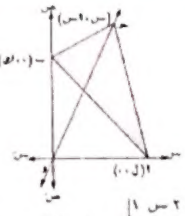
$\therefore \text{د}'(\text{ن}(\text{س})) = \frac{\text{ن}(\text{س})}{\sqrt{(\text{ن}(\text{س}))^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\sqrt{\frac{1}{\text{س}^2} + 1}}$

$= \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\sqrt{\frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2}}} = \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\left|\frac{1}{\text{س}}\right|\sqrt{\text{س}^2 + 1}}$

ومن (١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\left|\frac{1}{\text{س}}\right|\sqrt{\text{س}^2 + 1}} \times -\text{س}^2$

$= \begin{cases} \frac{-1}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^2 + 1}} & ، \text{س} > 0 \\ \frac{1}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^2 + 1}} & ، \text{س} < 0 \end{cases}$

٢٧



$\because \begin{vmatrix} \text{س} & 2\text{س} & 1 \\ \text{ل} & 0 & 1 \\ 0 & \text{ل} & 1 \end{vmatrix} = \text{س}(0 - \text{ل}) - 2\text{س}(\text{ل} - 0)$

$+ 1(\text{ل}^2 - 0)$

$= -\text{ل س} - 2\text{ل س} + \text{ل}^2$

$= -(2\text{ل} + \text{ل})\text{س} + \text{ل}^2$

$\therefore$ مساحة Δ أ ب جـ $= \left|\frac{1}{2}\right| - (2\text{ل} + \text{ل})\text{س} + \text{ل}^2|$

$= \left|-\left(\text{ل} + \frac{\text{ل}}{2}\right)\text{س} + \frac{1}{2}\text{ل}^2\right|$

$\therefore$ المساحة م

$= \begin{cases} -\left(\text{ل} + \frac{\text{ل}}{2}\right)\text{س} + \frac{1}{2}\text{ل}^2 & ، \text{س} < \frac{\text{ل}}{2\text{ل} + 2} \\ \left(\text{ل} + \frac{\text{ل}}{2}\right)\text{س} - \frac{1}{2}\text{ل}^2 & ، \text{س} > \frac{\text{ل}}{2\text{ل} + 2} \end{cases}$

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = \begin{cases} -\text{ل} - \frac{\text{ل}}{2} & ، \text{س} < \frac{\text{ل}}{2\text{ل} + 2} \\ \text{ل} + \frac{\text{ل}}{2} & ، \text{س} > \frac{\text{ل}}{2\text{ل} + 2} \end{cases}$

إجابات تمارين 3

١

① $\text{ص} = \text{س}^3 - 5\text{س}^2 + 6\text{س} - 4$

$\therefore \text{ص}' = 3\text{س}^2 - 10\text{س} + 6$

$\therefore \text{ص}'' = 6\text{س} - 10$

② $\text{ص} = (3\text{س}^2 - 4)(\text{س} + 3)$

$\therefore \text{ص}' = 6\text{س}(\text{س} + 3) + 3\text{س}^2 - 4$

$= 6\text{س}^2 + 18\text{س} + 3\text{س}^2 - 4$

$= 9\text{س}^2 + 18\text{س} - 4$

$\therefore \text{ص}'' = 18\text{س} + 18$

③ $\text{ص} = \text{س}^2(\text{س} + 2)^2$

$\therefore \text{ص} = (\text{س}^3 + 2\text{س})^2$

$\therefore \text{ص}' = 2(\text{س}^3 + 2\text{س})(3\text{س}^2 + 2)$

$\therefore \text{ص}'' = 2\left[(3\text{س}^2 + 2)(3\text{س}^2 + 2)\right]$

$+ 2(\text{س}^3 + 2\text{س})[6\text{س}]$

$= 2\left[(3\text{س}^2 + 2)^2 + 2(\text{س}^3 + 2\text{س})6\text{س}\right]$

$= 2(9\text{س}^4 + 12\text{س}^2 + 4) + 4(\text{س}^3 + 2\text{س})$

$= 18\text{س}^4 + 24\text{س}^2 + 8$

④ $\text{ص} = \frac{\text{س} + 2}{\text{س} - 2}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{س} - 2)(1) - (\text{س} + 2)(1)}{(\text{س} - 2)^2}$

$= \frac{-4}{(\text{س} - 2)^2} = -4(\text{س} - 2)^{-2}$

$\therefore \text{ص}'' = 8(\text{س} - 2)^{-3}$

⑤ $\text{ص} = \text{س} + \sqrt{\text{س} + 5}$

$\therefore \text{ص}' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\text{س} + 5}} = 1 + \frac{1}{2}(\text{س} + 5)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore \text{ص}'' = -\frac{1}{4}(\text{س} + 5)^{-\frac{3}{2}}$

⑥ $\text{ص} = (\text{س} - 2)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{1}{2}(\text{س} - 2)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore \text{ص}'' = -\frac{1}{4}(\text{س} - 2)^{-\frac{3}{2}}$

⑦ $\text{ص} = \text{جا}(5\text{س} + 1)$

$\therefore \text{ص}' = 5\,\text{جتا}(5\text{س} + 1)$

$\therefore \text{ص}'' = -25\,\text{جا}(5\text{س} + 1)$

⑧ $\text{ص} = 2\text{س}^3 + \text{جا}3\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = 6\text{س}^2 + 3\,\text{جتا}3\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = 12\text{س} - 9\,\text{جا}3\text{س}$

⑨ $\text{ص} = \text{س جا}2\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = -\text{س}(2\,\text{جا}2\text{س}) + \text{جا}2\text{س}$

$= -2\text{س جا}2\text{س} + \text{جا}2\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = -2\,\text{جا}2\text{س} - 4\text{س جتا}2\text{س} - 2\,\text{جا}2\text{س}$

$= -4\,\text{جا}2\text{س} - 4\text{س جتا}2\text{س}$

⑩ $\text{ص} = 9\,\text{قا}\frac{\text{س}}{2}$

$\therefore \text{ص}' = 3\,\text{قا}^2\frac{\text{س}}{2}$

$\therefore \text{ص}'' = 6\,\text{قا}\frac{\text{س}}{2} \times \left(\text{قا}\frac{\text{س}}{2}\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{2}\right) \times \frac{1}{2}$

$= 3\,\text{قا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{2}$

⑪ $\text{ص} = 2\,\text{جا}^2\text{س} - 5\,\text{جا}^2\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = 4\,\text{جاس جتاس} + 10\,\text{جاس جتاس}$

$= 14\,\text{جاس جتاس} = 7\,\text{جا}2\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = 7(\text{جتا}2\text{س}) \times 2 = 14\,\text{جتا}2\text{س}$

⑫ $\text{ص} = \text{س جا}^2\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = \text{س}(2\,\text{جاس جتاس}) + \text{جا}^2\text{س}$

$= \text{س جا}2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = 2\text{س جتا}2\text{س} + 2\,\text{جا}2\text{س} + 2\,\text{جاس جتاس}$

$= 2\text{س جتا}2\text{س} + 2\,\text{جا}2\text{س}$

١

(١) ص = ٢ جا ٢ س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ جتا ٢ س

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = −٨ جا ٢ س

∴ $\left(\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right)_{س = \frac{\pi}{٤}}$ = −٨

(٢) ص = جا س − جا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = جا س + جا س

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = − جا س + جا س

∴ $\left(\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right)_{س = \pi}$ = صفر

(٣) ص = ٢ جا س جتا س

∴ ص = جا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = جا ٢ س × ٢ جتا ٢ س + جتا ٢ س

= ٢ جا س جتا ٢ س + جتا ٢ س

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = −٤ جا س جتا ٢ س + ٢ جتا ٢ س

= −٤ جا س جتا ٢ س + ٤ جتا ٢ س

∴ $\left(\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right)_{س = \pi}$ = ٤

(٤) ص = جا س جتا س − جتا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = − جا س جتا س + جتا س − جتا س

= − جا س جتا س

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = − جا س جتا س − جتا س

∴ $\left(\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right)_{س = \frac{\pi}{٢}}$ = −١

(٥) ص = $\frac{٢ س − ١}{س + ٣}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ (س + ٣) − (٢ س − ١)}{(س + ٣)^٢}$

= $\frac{٧}{(س + ٣)^٢}$ = ٧ (س + ٣)^−٢

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = −١٤ (س + ٣)^−٣

∴ $\left(\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right)_{س = ٢}$ = −١٤

٢

(١) ص = س^٥ − ٤ س^٣ + ٢

∴ ص′ = ٥ س^٤ − ١٢ س^٢

∴ ص″ = ٢٠ س^٣ − ٢٤ س

∴ ص‴ = ٦٠ س^٢ − ٢٤

(٢) ص = جا س

∴ ص′ = − جا س ∴ ص″ = جا س

(٣) ص = جا (π − ٢ س)

∴ ص′ = − جا (π − ٢ س) × −٢ = ٢ جا (π − ٢ س)

∴ ص″ = ٢ جا (π − ٢ س) × −٢

= −٤ جا (π − ٢ س)

∴ ص‴ = −٤ (− جا (π − ٢ س)) × −٢

= −٨ جا (π − ٢ س) = −٨ جا ٢ س

(٤) ص = (٢ س + ٧)^٤ + جا ٢ س

∴ ص′ = ٤ (٢ س + ٧)^٣ (٢) + ٢ جتا ٢ س

= ٨ (٢ س + ٧)^٣ + ٢ جتا ٢ س

∴ ص″ = ٢٤ (٢ س + ٧)^٢ (٢) − ٤ جا ٢ س

= ٤٨ (٢ س + ٧)^٢ − ٤ جا ٢ س

∴ ص‴ = ٩٦ (٢ س + ٧) (٢) − ٨ جتا ٢ س

= ١٩٢ (٢ س + ٧) − ٨ جتا ٢ س

(٥) د (س) = $\frac{٢ س}{س + ١}$

∴ د′ (س) = $\frac{٢ (س + ١) − ٢ س}{(س + ١)^٢}$ = $\frac{٢}{(س + ١)^٢}$

= ٢ (س + ١)^−٢

∴ د″ (س) = −٤ (س + ١)^−٣

∴ د‴ (س) = ١٢ (س + ١)^−٤

٣

(١) ص = $\frac{س + ١}{س − ١}$

∴ ص′ = $\frac{(س − ١) (١) − (س + ١) (١)}{(س − ١)^٢}$

= $\frac{−٢}{(س − ١)^٢}$ = −٢ (س − ١)^−٢

∴ ص″ = ٤ (س − ١)^−٣

∴ ص‴ = −١٢ (س − ١)^−٤

(٧) ص = ٢ س + ٣ س^−١ ∴ ص′ = ٢ − ٣ س^−٢

∴ ص″ = ٦ س^−٣ ∴ ص‴ = −١٨ س^−٤

(٨) ص = (٢ س − ٥)^$\frac{١}{٢}$

∴ ص′ = $\frac{١}{٢}$ (٢ س − ٥)^−$\frac{١}{٢}$ × ٢ = (٢ س − ٥)^−$\frac{١}{٢}$

∴ ص″ = −$\frac{١}{٤}$ (٢ س − ٥)^−$\frac{٣}{٢}$ × ٢ = − (٢ س − ٥)^−$\frac{٣}{٢}$

∴ ص‴ = $\frac{٣}{٨}$ (٢ س − ٥)^−$\frac{٥}{٢}$ × ٢ = ٣ (٢ س − ٥)^−$\frac{٥}{٢}$

(٩) ص = جا س جتا س = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س

∴ ص′ = $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س × ٢ = جتا ٢ س

∴ ص″ = − جا ٢ س × ٢ = −٢ جا ٢ س

∴ ص‴ = −٢ جتا ٢ س × ٢ = −٤ جتا ٢ س

(١٠) ص = ٢ س^٣ + س جتا ٢ س

∴ ص′ = ٦ س^٢ + س (−٢ جا ٢ س) + جتا ٢ س

= ٦ س^٢ − ٢ س جا ٢ س + جتا ٢ س

∴ ص″ = ١٢ س − ٤ س جتا ٢ س − ٢ جا ٢ س

− ٢ جا ٢ س

= ١٢ س − ٤ س جتا ٢ س − ٤ جا ٢ س

∴ ص‴ = ١٢ − ٤ س (−٢ جا ٢ س) − ٤ جتا ٢ س

− ٨ جتا ٢ س

= ١٢ + ٨ س جا ٢ س − ١٢ جتا ٢ س

٤

ص = س^٥ − ١٠ س^٤ + ٦٠ س^٢ + ١٢٠

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٥ س^٤ − ٤٠ س^٣ + ١٢٠ س

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢٠ س^٣ − ١٢٠ س^٢ + ١٢٠ (١)

∴ $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ = ٦٠ س^٢ − ٢٤٠ س

∴ $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ = ١٢٠ س − ٢٤٠ ، عندما $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٠

∴ ١٢٠ س − ٢٤٠ = ٠ ∴ س = ٢

بالتعويض في (١) : $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = −٢٠٠

٥

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (أ) (٥) (ب)

(٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (أ) (٩) (ب) (١٠) (ب)

(١١) (ب) (١٢) (ب) (١٣) (أ) (١٤) (ب)

٦

ص = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + ء

∴ ص′ = ٣ أ س^٢ + ٢ ب س + جـ

∴ ص″ = ٦ أ س + ٢ ب

∴ ص″ = ٢٨ عند س = ١

٢٨ = ٦ أ + ٢ ب منها ٣ أ + ب = ١٤ (١)

، ص′ = ٣٤ عند س = ٢

٣٤ = ١٢ أ + ٢ ب منها ٦ أ + ب = ١٧ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن : أ = ١ ، ب = ١١

∴ ص′ = ٧٥ عند س = ٢

٧٥ = ٣ × ١ × ٤ + ٢ × ١١ × ٢ + جـ

∴ جـ = ١٩

، ص = ٨ عند س = ١

٨ = ١ × ١^٣ + ١١ × ١^٢ + ١٩ × ١ + ء

∴ ء = −٢٢

س	ص	ص′	ص″
١	٨	٤٤	٢٨
٢	٦٧	٧٥	٢٤

٧

∵ س^٢ + ص^٢ = ١٦ (وبالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

(وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ س)

∴ ٢ + ٢ ص × $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ × ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ ٢ + ٢ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ = ٠

بالقسمة على ٢ : ∴ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ + ١ = ٠

٨

∵ ص^٢ + أ س^٢ − ب س = جـ

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ أ س^٢ − ب = صفر

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

∴ ٢ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ + ٢ أ س = ٠

بالقسمة على ٢

∴ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ + ٢ أ س = ٠

٩

ص^٢ = س^٢ − س^٣ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − ٣ س^٢

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

٢ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ − ٦ س

بالقسمة على ٢

∴ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ = ١ − ٣ س

∴ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ + ٣ س = ١

١٠

٤ ص^٣ = ٣ س^٢ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ١٢ ص^٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س ∴ ٢ ص^٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = س

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ ٤ ص $\frac{ءص}{ءس}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ١

∴ ٤ ص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ + ٢ ص^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ١

١١

∵ س^٢ + ص^٢ = ١ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س^٢ + ٢ ص^٢ ص″ = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

∴ ٦ س + ٢ (٢ ص ص″ × ص″ + ص^٢ ص‴) = ٠

بالقسمة على ٢

∴ ص^٢ ص″ + ٢ ص ص‴ + ٢ س = ٠

١٢

∵ س^٢ ص^٢ = ١ ∴ س ص = ١

∴ س ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ص^٢ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{−ص}{س}$

∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ × $\frac{−ص}{س}$ ∴ س^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ ص

حل آخر :

∵ س ص = ١ ∴ ص = س^−١

∴ ص″ = − س^−٢ ∴ ص″ = ٢ س^−٣

∴ س^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = س^٢ × ٢ س^−٣ = $\frac{٢}{س}$ = ٢ ص

١٣

∵ س^٢ ص = ٢ س + ٥ (بالاشتقاق بالنسبة الى س)

∴ س^٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ س ص = ٢

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ س^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص = ٠

∴ س^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٤ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص = ٠

١٤

∵ ص^٢ = س ∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ١

∴ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢}$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

∴ ص × $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

وبالضرب × ص

∴ ص^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ = ٠

∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ = ٠

١٥

∵ ٢ س ص + ٣ = ٥ س^٢

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ $\left(س \frac{ءص}{ءس} + ص\right)$ = ١٠ س

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

∴ ٢ $\left[س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس}\right]$ = ١٠

∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٥

١٦

∵ س ص″ = ١ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س ص″ + ٢ ص ص″ = ٠

∴ ص″ = − س^−٢ (وبالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س^−٢ ∴ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = س^−٢

(وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢ س^−٢

∴ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ + $\frac{٢}{س^٢}$ = صفر

١٧

٢ ص^٣ = ٤ س^٢ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ١٢ ص^٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢ س^٢

(بالقسمة على ١٢) ∴ ص^٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = س^٢

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ ٣ ص^٢ $\frac{ءص}{ءس}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ + ص^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ س

∴ ص^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ ص^٢ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ = ٢ س

(بالقسمة على ص^٢)

∴ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ = $\frac{٢ س}{ص}$

١٨

ص = س^−١ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = − س^−٢ (بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ س^−٣

∴ س^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص

= س^٢ (٢ س^−٣) + ٢ س (− س^−٢) + س^−١

= ٢ س^−١ − ٢ س^−١ + س^−١ = صفر

٢٥

∵ (١ + س) ص = س² (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ (١ + س) $\frac{دص}{دس}$ + ص × ٢ س

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ (١ + س) $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + $\frac{دص}{دس}$ × ٢ + ٢ ص × ٢ س

∴ (١ + س) $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٢ $\frac{دص}{دس}$ + ٢ ص

٢٦

س ص² + س² ص² = ٨

∴ ص² (١ + س²) = ٨ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ص $\frac{دص}{دس}$ × (١ + س²) + ص² (٢ س) = صفر

(بالقسمة على ٢ ص)

∴ (١ + س²) $\frac{دص}{دس}$ + س ص = صفر

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

(١ + س²) $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + $\frac{دص}{دس}$ (٢ س) + س $\frac{دص}{دس}$ + ص = ٠

(س² + ١) $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٣ س $\frac{دص}{دس}$ + ص = ٠

٢٧

∵ ٤ س² + ص² = ٢٥ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٨ س + ٢ ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠ (بالقسمة على ٢)

∴ ٤ س + ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠ (١)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-٤ س}{ص}$ (٢)

وبالاشتقاق للعلاقة (١) مرة أخرى بالنسبة إلى س

∴ ٤ + ($\frac{دص}{دس}$)² + ص × $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٠ (٣)

ثم بتعويض من (٢) في (٣)

∴ ٤ + $\frac{١٦ س^٢}{ص^٢}$ + ص × $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

(بالضرب × ص²)

∴ ٤ ص² + ١٦ س² + ص³ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

∴ ٤ (ص² + ٤ س²) + ص³ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

∴ ٤ × ٢٥ + ص³ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

∴ ص³ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٢٠٠

٢٨

∵ $\frac{دص}{دس}$ = − جاس ، $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = − جتاس

∴ الطرف الأيمن

= (− جاس)² − جتاس (− جتاس)

= جا² س + جتا² س = ١ = الطرف الأيسر

٢٩

∵ ص = ٢ جتا (٣ س + ١)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = −٦ جا (٣ س + ١)

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = −١٨ جتا (٣ س + ١)

= −٩ × ٢ جتا (٣ س + ١) = −٩ ص

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٩ ص = ٠

٣٠

ص = ظاس

$\frac{دص}{دس}$ = قا² س

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٢ قاس × قاس ظاس = ٢ قا² س ظاس (١)

∵ ٢ ص (١ + ص²) = ٢ ظاس = (١ + ظا² س)

= ٢ ظاس × قا² س (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٢ ص (١ + ص²)

٣١

ص س = ١ − جاس (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص + س $\frac{دص}{دس}$ = جاس

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{دص}{دس}$ + س $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + $\frac{دص}{دس}$ = جاس

∴ س $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٢ $\frac{دص}{دس}$ = جاس

٣٢

∵ ص = س² + س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س + ١

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٢

∴ $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = صفر

٣٣

ص = س² جاس

∴ $\frac{دص}{دس}$ = س² جتاس + ٢ س جاس

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = −س² جاس + ٢ س جتاس + ٢ س جتاس + ٢ جاس

= (٢ − س²) جاس + ٤ س جتاس

٣٤

∵ ص = جاس

∴ $\frac{دص}{دس}$ = جتاس

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = −جاس جاس + جتاس جتاس

= −جا² س + جتا² س

= جتا² س − جا² س

= جتا (٢ س)

∴ $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = −٢ جا (٢ س)

٣٥

ص = جا² س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ جا س جتاس

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٢ جا س × $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٢ جتاس × $\frac{دص}{دس}$

(١) ∴ ٤ ($\frac{دص}{دس}$)² + ($\frac{د^٢ص}{دس^٢}$)²

= ٤ (٢ جا س جتاس)² + (٢ جا² س)²

= ١٦ جا² س جتا² س + ١٦ جا⁴ س = ١٦ جا² س (جتا² س + جا² س)

= ١٦ جا² س

(٢) $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٤ ص

= ٨ جا² س + ٤ (جا² س)

= ٨ جا² س − ٨ جا² س = صفر

٣٦

ص = جا ٢ س + جتا ٢ س

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ جتا ٢ س − ٢ جا ٢ س

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = −٤ جا ٢ س − ٤ جتا ٢ س

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = −٨ جا ٢ س + ٨ جا ٢ س

$\frac{د^٤ص}{دس^٤}$ = ١٦ جا ٢ س + ١٦ جا ٢ س

٣٧

ص = جا س جتاس

$\frac{دص}{دس}$ = جتاس × جتاس + جاس × −جاس

= جتا² س − جا² س

= جتا (٢ س)

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = −جاس جتاس − جاس جتاس − ٢ جاس جتاس

= −٤ جاس جتاس

(١) $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٢ ص

= −٤ جاس جتاس + ٢ (جا² س − جتا² س)

(٢) ص $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + $\frac{دص}{دس}$ + ٢ ص

= (جا² س − جتا² س) (−٤ جاس جتاس)

= (جا² س − جتا² س) × −٢ (٢ جاس جتاس)

= −٢ جا² س + ٢ جتا² س + ٢ جا² س − ٢ جتا² س

= صفر

٣٨

(١) ص = جا ٢ س + جتا ٢ س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ جتا ٢ س − ٢ جا ٢ س

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = −٤ جا ٢ س − ٤ جتا ٢ س

∴ $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = −٨ جا ٢ س + ٨ جا ٢ س

∴ $\frac{د^٤ص}{دس^٤}$ = ١٦ جا ٢ س + ١٦ جا ٢ س

(٢) ٢ جا ٢ س × $\frac{د^٤ص}{دس^٤}$ + ٨ جا ٢ س × $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ + ٤ جا ٢ س × $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٢ جتا ٢ س × $\frac{دص}{دس}$ + ٢ جا ٢ س × ص

= ٣٢ جا² ٢ س + ٣٢ جا² ٢ س + ٨ جا² ٢ س + ٨ جتا² ٢ س + ٨ جا² ٢ س

= ٨ (٩ جا² ٢ س + جتا² ٢ س) = صفر

٣٩

(١) ص = جا ٢ س + جتا ٢ س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ جتا ٢ س − ٢ جا ٢ س

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = −٤ جا ٢ س − ٤ جتا ٢ س

∴ $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = −٨ جا ٢ س + ٨ جا ٢ س

∴ $\frac{د^٤ص}{دس^٤}$ = ١٦ جا ٢ س + ١٦ جا ٢ س

(٢) $\frac{د^٤ص}{دس^٤}$ − ٨ جا ٢ س × $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ − ٤ جا ٢ س × $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ − ٢ جتا ٢ س × $\frac{دص}{دس}$ − ٢ جا ٢ س × ص

= ١٦ جا ٢ س + ١٦ جا ٢ س − ٨ جا ٢ س + ٨ جا ٢ س − ٤ جا ٢ س + ٤ جا ٢ س − ٢ جتا ٢ س + ٢ جتا ٢ س − ٢ جا ٢ س + ٢ جا ٢ س

= صفر

٤٠

ص = جا ٢ س + جتا ٢ س

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ جتا ٢ س − ٢ جا ٢ س

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = −٤ جا ٢ س − ٤ جتا ٢ س

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = −٨ جا ٢ س + ٨ جا ٢ س

$\frac{د^٤ص}{دس^٤}$ = ١٦ جا ٢ س + ١٦ جا ٢ س

$\frac{د^٥ص}{دس^٥}$ = ٣٢ جا ٢ س − ٣٢ جا ٢ س

$\frac{د^٦ص}{دس^٦}$ = ٦٤ جا ٢ س + ٦٤ جا ٢ س

٤١

ص = س

$\frac{دص}{دس}$ = ١

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = صفر

ط الم

ص = س

$\frac{دص}{دس}$ = ١

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = صفر

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = صفر

٤٢

ص = $\frac{س}{س + ١}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{(س + ١)^٢}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{-٢}{(س + ١)^٣}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{٦}{(س + ١)^٤}$

٤٣

ص = $\sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{-١}{٤ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{٣}{٨ س^٢\sqrt{س}}$

٤٤

ص = $\frac{١}{\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-١}{٢ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{٣}{٤ س^٢\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{-١٥}{٨ س^٣\sqrt{س}}$

٤٥

ص = $\frac{١}{س}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-١}{س^٢}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{٢}{س^٣}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{-٦}{س^٤}$

٤٦

ص = $\sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{-١}{٤ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{٣}{٨ س^٢\sqrt{س}}$

٤٧

ص = $\frac{١}{\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-١}{٢ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{٣}{٤ س^٢\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{-١٥}{٨ س^٣\sqrt{س}}$

٤٨

ص = $\frac{س}{\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{-١}{٢ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{٣}{٤ س^٢\sqrt{س}}$

٤٩

ص = $\frac{١}{\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-١}{٢ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{٣}{٤ س^٢\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{-١٥}{٨ س^٣\sqrt{س}}$

٥٠

ص = $\sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{-١}{٤ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{٣}{٨ س^٢\sqrt{س}}$

٥١

ص = $\frac{س}{\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{-١}{٢ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{٣}{٤ س^٢\sqrt{س}}$

٥٢

ص = $\frac{١}{\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-١}{٢ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{٣}{٤ س^٢\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{-١٥}{٨ س^٣\sqrt{س}}$

٥٣

ص = $\sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{-١}{٤ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{٣}{٨ س^٢\sqrt{س}}$

٥٤

ص = $\frac{س}{\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{-١}{٢ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{٣}{٤ س^٢\sqrt{س}}$

٥٥

ص = $\frac{١}{\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-١}{٢ س\sqrt{س}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = $\frac{٣}{٤ س^٢\sqrt{س}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ = $\frac{-١٥}{٨ س^٣\sqrt{س}}$

٢٦

٢٧

٢٨

٢٩

٣٠

٣١

٣٢

٣٣

٣٤

٣٥

٣٦

٣٧

٣٨

٣٩

٤٠

٤١

٤٢

٤٣

٤٤

٤٥

٤٦

٤٧

٤٨

٥٩

$\text{ص} = \frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} + ١) - (\text{س} - ١)}{(\text{س} + ١)^{٢}} = \frac{٢}{(\text{س} + ١)^{٢}} = ٢(\text{س} + ١)^{-٢}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -٢ \times ٢(\text{س} + ١)^{-٣} = \frac{-٤}{(\text{س} + ١)^{٣}}$

$\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = ٢ \times ٢ \times ٣(\text{س} + ١)^{-٤} = \frac{١٢}{(\text{س} + ١)^{٤}}$

$\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}} = -٢ \times ٢ \times ٣ \times ٤(\text{س} + ١)^{-٥} = \frac{-٢٤}{(\text{س} + ١)^{٥}}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}} = \frac{(-١)^{\text{ن}} \times ٢ \times \text{ن}!}{(\text{س} + ١)^{\text{ن}+١}}$

٦٠

$\text{ص} = \text{جتا}\, ٢\text{س}$

$\text{ص}' = -٢\, \text{جا}\, ٢\text{س} = ٢\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٢}\right)$

$\text{ص}'' = -٢^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} = ٢^{٢}\, \text{جتا}(٢\text{س} + \pi)$

$\text{ص}''' = ٢^{٣}\, \text{جا}\, ٢\text{س} = ٢^{٣}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٣\pi}{٢}\right)$

$\therefore \text{ص}^{(٤)} = ٢^{٤}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} = ٢^{٤}\, \text{جتا}(٢\text{س} + ٢\pi)$

$\therefore \text{ص}^{(٥)} = ٢^{٥}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٥\pi}{٢}\right)$

$\therefore \text{ص}^{(١٠)} = ٢^{١٠}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{١٥\pi}{٢}\right)$

$= ٢^{١٠}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٣\pi}{٢}\right) = ٢^{١٠}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$

$\text{ص}^{(٢٠)} = ٢^{٢٠}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٣٠\pi}{٢}\right)$

$= ٢^{٢٠}\, \text{جا}(٢\text{س}) = ٢^{٢٠}\, \text{ص}$

٦١

$\text{ص} = \text{جا}\, ٢\text{س}$

$\text{ص}' = ٢\, \text{جا}\, ٢\text{س} = ٢\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٢}\right)$

$\text{ص}'' = -٢^{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س} = ٢^{٢}\, \text{جا}(٢\text{س} + \pi)$

$\text{ص}''' = ٢^{٣}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٣\pi}{٢}\right)$

$\therefore \text{ص}^{(٤)} = ٢^{٤}\, \text{جا}(٢\text{س} + ٢\pi)$

$\therefore \text{ص}^{(١٠)} = ٢^{١٠}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{١٥\pi}{٢}\right)$

$= ٢^{١٠}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٢}\right) = ٢^{١٠}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$

$\text{ص}^{(٢٠)} = ٢^{٢٠}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٣٠\pi}{٢}\right)$

$= ٢^{٢٠}\, \text{جا}(٢\text{س}) = ٢^{٢٠}\, \text{ص}$

٦٢

$\text{ص} = \text{جا}\, ٢\text{س}$

$\text{ص}' = ٢\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٢}\right)$

$\text{ص}'' = -٢^{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س} = ٢^{٢}\, \text{جا}(٢\text{س} + \pi)$

$\text{ص}''' = ٢^{٣}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٣\pi}{٢}\right)$

$\therefore \text{ص}^{(٤)} = ٢^{٤}\, \text{جا}(٢\text{س} + ٢\pi)$

$\therefore \text{ص}^{(٧)} = ٢^{٧}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٧\pi}{٢}\right)$

$\therefore \text{ص}^{(١٠)} = ٢^{١٠}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{١٠\pi}{٢}\right)$

$= ٢^{١٠}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٢}\right) = ٢^{١٠}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}^{(١١)} = ٢^{١١}\, \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{١١\pi}{٢}\right)$

$= ٢^{١١}\, \text{جا}(٢\text{س}) = ٢^{١١}\, \text{ص}$

٦٣

$\text{جا}\, \text{ص} + \text{جا}\, ٢\text{س} = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\text{جا}\, \text{ص}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\, \text{جا}\, ٢\text{س} = ٠$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\text{جا}\, \text{ص}\, \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \text{جتا}\, \text{ص} + ٤\, \text{جتا}\, ٢\text{س} = ٠$

(بالقسمة على جتا ص)

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} - \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} \text{ظا}\, \text{ص} = ٤\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{قا}\, \text{ص}$

٦٤

$\text{جتا}\, ٢\text{س} - \text{جتا}\, ٢\text{ص} = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٢\, \text{جتا}\, ٢\text{س} + ٢\, \text{جتا}\, ٢\text{ص}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$-٤\, \text{جا}\, ٢\text{س} + ٩\, \text{جتا}\, ٢\text{ص}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\left(٢\, \text{جا}\, ٢\text{ص}\right) = ٠$

(بالقسمة على جتا ٢ ص)

$-٤\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{قتا}\, ٢\text{ص} + ٩\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\left(٢\, \text{ظا}\, ٢\text{ص}\right) = ٠$

(ولكن جا ٢ س = جا ٢ ص)

$\therefore ٢\, \text{ظا}\, ٢\text{ص}\, \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٩\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} - ٤ = ٠$

٦٥

① (١) ② (س) ③ (ص) ④ (١)

⑤ (ص) ⑥ (ص) ⑦ (ص)

إرشادات لحل رقم ٦٥

① $\because \text{ص} = ١ + \frac{\text{س}}{\lfloor ١} + \frac{\text{س}^{٢}}{\lfloor ٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{\lfloor ٣} + \dots$ إلى ∞

$\therefore \text{ص}' = \text{صفر} + \frac{١}{\lfloor ١} + \frac{٢\text{س}}{\lfloor ٢} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{\lfloor ٣} + \dots$ إلى ∞

$= ١ + \frac{\text{س}}{\lfloor ١} + \frac{\text{س}^{٢}}{\lfloor ٢} + \dots$ إلى ∞ $\therefore \text{ص}' = \text{ص}$

$\therefore \text{ص}'' = \text{ص}' = \text{ص}$

$\therefore ٥\, \text{ص}'' - ٢\, \text{ص}' - ٣\, \text{ص}$

$= ٥\, \text{ص} - ٢\, \text{ص} - ٣\, \text{ص} = \text{صفر}$

② $\because \text{د}(\text{س} + \text{هـ}) = \text{د}(\text{س}) + \text{س}\, \text{هـ}' + \text{هـ}^{٢}$

$= \text{هـ}(٥\, \text{س}^{٢} + \text{هـ})$

$\therefore \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = ٥\, \text{س}^{٢} + \text{هـ}$

$\therefore \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} (٥\, \text{س}^{٢} + \text{هـ})$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٥\, \text{س}^{٢}$ $\therefore \text{د}''(\text{س}) = ١٠\, \text{س}$

$\therefore \text{د}''(\text{س}) = ١٠$ $\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ١٠$

٦٦

$\text{ص} = \text{لو}_{٢}\, \text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\, \text{لو}\, \text{س}\, \text{لو}_{٢}\, \text{س}$

$= ٢\, \text{لو}\, \text{س}\left(١ + \text{لو}\, \text{س}\right)$

$= ٢\, \text{لو}\, \text{س} + ٢\, \text{لو}^{٢}\, \text{س}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢\, \text{لو}^{٢}\, \text{س} + ٦\, \text{لو}^{٢}\, \text{س}$

$= ٢(١ + \text{ص}) + ٦\, \text{ص}(١ + \text{ص})$

$= ٢(١ + \text{ص})(١ + ٣\text{ص})$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{١}{٢}(١ + \text{ص})(١ + ٣\text{ص})$

٦٧

① $\because \text{ص}^{٢} = \text{س}$ $\therefore \text{ص} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}\, \text{س}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

ميل المماس عند (س = ٨) = $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=٨} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \text{ظا}\, \theta = \frac{١}{٤}$ $\therefore \theta = ١٨^{\circ}\, ٢٦'$

٦٨

$\text{ص} = \frac{\text{أس} + \text{ب}}{\text{جس} + \text{د}}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{جس} + \text{د})(\text{أ}) - (\text{أس} + \text{ب})(\text{جـ})}{(\text{جس} + \text{د})^{٢}}$

$= \frac{\text{أد} - \text{ب جـ}}{(\text{جس} + \text{د})^{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{أد} - \text{ب جـ})(\text{جس} + \text{د})^{-٢}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -٢\, \text{جـ}(\text{أد} - \text{ب جـ})(\text{جس} + \text{د})^{-٣}$

$\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = ٦\, \text{جـ}^{٢}(\text{أد} - \text{ب جـ})(\text{جس} + \text{د})^{-٤}$

الطرف الأيمن = $٢\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)\left(\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}\right)$

$= ٢(\text{أد} - \text{ب جـ})(\text{جس} + \text{د})^{-٢}$

$\times ٦\, \text{جـ}^{٢}(\text{أد} - \text{ب جـ})(\text{جس} + \text{د})^{-٤}$

$= ١٢\, \text{جـ}^{٢}(\text{أد} - \text{ب جـ})^{٢}(\text{جس} + \text{د})^{-٦}$

الطرف الأيسر = $٣\left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)^{٢}$

$= ٣\left(-٢\, \text{جـ}(\text{أد} - \text{ب جـ})(\text{جس} + \text{د})^{-٣}\right)^{٢}$

$= ١٢\, \text{جـ}^{٢}(\text{أد} - \text{ب جـ})^{٢}(\text{جس} + \text{د})^{-٦}$

∴ الطرفان متساويان.

٦٩

$\text{ص} = \text{س}^{٢}\, \text{لو}\, \text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\, \text{لو}\, \text{س}\, \text{لو}\, \text{س}$

$= ٢\, \text{لو}\, \text{س}(١ + \text{لو}\, \text{س})$

$= ٢\, \text{لو}\, \text{س} + ٢\, \text{لو}^{٢}\, \text{س}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٦\, \text{لو}^{٢}\, \text{س} + ٢\, \text{لو}\, \text{س}$

$= ٢(\text{ص} + ٣\, \text{ص}\, \text{لو}\, \text{س})$

$= ٢(\text{ص} + ٣\, \text{ص}(\text{لو}\, \text{س} + ١))$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢(\text{ص} + ٣\, \text{ص}(\text{لو}\, \text{س} + ١))$

٧٠

① $\because \text{ص}^{٢} = \text{س}$ $\therefore \text{ص} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}\, \text{س}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

ميل المماس عند (س = ٨) = $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=٨} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \text{ظا}\, \theta = \frac{١}{٤}$ $\therefore \theta = ١٨^{\circ}\, ٢٦'$

٧١

$٢\, \text{س}^{٢} + ٦\, \text{ص}^{٢} = ٤$

$\therefore ٦\, \text{ص}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\, \text{س} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\, \text{س}}{٦\, \text{ص}} = \frac{-\text{س}}{٣\, \text{ص}}$

$\therefore \text{ميل المماس عند (س = ٢)} = \frac{-٢}{٣\, \text{ص}}$

$\therefore \text{ظا}\, \theta = \frac{-٢}{٣\, \text{ص}}$

$\therefore \text{ظا}\, ٤٥^{\circ} = \frac{-٢}{٣\, \text{ص}}$

$\therefore \text{ص} = \frac{-٢}{٣}$

$\therefore \text{النقطة هي} \left(٢ ، \frac{-٢}{٣}\right)$

٧٢

$\because \text{س}^{٢} + ٢\, \text{س}\, \text{ص} + \text{ص}^{٢} = ٥$

$\therefore ٢\, \text{س} + ٢\, \text{ص} + ٢\, \text{س}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\, \text{ص}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\, \text{س} - ٢\, \text{ص}}{٢\, \text{س} + ٢\, \text{ص}}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، ٢)} = -١$ $\therefore \text{ظا}\, \text{هـ} = -١$

$\therefore \text{هـ} = ١٣٥^{\circ}$

٧٣

$\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٣}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{٢}\, \text{س}^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢\sqrt{\text{س}}}$

ميل المماس عند (س = ٨) = $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=٨} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \text{ظا}\, \theta = \frac{١}{٤}$ $\therefore \theta = ١٨^{\circ}\, ٢٦'$

٧٤

$\because ٣\, \text{ص}^{٢} - ٦\, \text{ص} + \text{س}^{٢} = ٠$

$\therefore ٦\, \text{ص}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٦\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\, \text{س} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\, \text{س}}{٦\, \text{ص} - ٦} = \frac{-\text{س}}{٣\, \text{ص} - ٣}$

إجابات تمارين 4

١

نقطة التقاطع مع محور السينات : نضع ص = ٠

$\therefore \text{س}^{٢} - ٢\, \text{س} - ٨ = ٠$

$(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٢) = ٠$

$\therefore \text{س} = ٤$ ومنها ص = ٠ $\therefore$ النقطة (٤ ، ٠)

أو س = −٢ ومنها ص = ٠ $\therefore$ النقطة (−٢ ، ٠)

$\because ٢\, \text{س} + ٢\, \text{ص}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٢ + ٤\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\, \text{س} + ٢}{٢\, \text{ص} + ٤} = \frac{\text{س} + ١}{\text{ص} + ٢}$

$\therefore$ ميل المماس هو

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٠ ، ٢)} = \frac{٣}{٦}$ ، $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٤ ، ٠)} = \frac{٣}{٢}$

٢

$\because \text{س}^{٢} + ٢\, \text{س}\, \text{ص} + \text{ص}^{٢} = ٥$

$\therefore ٢\, \text{س} + ٢\, \text{ص} + ٢\, \text{س}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\, \text{ص}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\, \text{س} - ٢\, \text{ص}}{٢\, \text{س} + ٢\, \text{ص}}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، ٠)} = -١$ $\therefore \text{ظا}\, \text{هـ} = -١$

$\therefore \text{هـ} = ١٣٥^{\circ}$

٣

$\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢}$ $\therefore \text{ص} = \text{س}^{\frac{٢}{٣}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢}{٣}\, \text{س}^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}}$

ميل المماس عند (س = ٨) = $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=٨} = \frac{١}{٣}$

$\therefore \text{ظا}\, \theta = \frac{١}{٣}$ $\therefore \theta = ١٨^{\circ}\, ٢٦'$

٤

$\because ٣\, \text{ص}^{٢} - ٦\, \text{ص} + \text{س}^{٢} = ٠$

$\therefore ٦\, \text{ص}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٦\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\, \text{س} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\, \text{س}}{٦\, \text{ص} - ٦} = \frac{-\text{س}}{٣\, \text{ص} - ٣}$

① نجعل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صفر}$ $\therefore \frac{-\text{س}}{٣\, \text{ص} - ٣} = ٠$

$\therefore \text{س} = ٠$ بالتعويض في معادلة المنحنى

$\therefore ٣\, \text{ص}^{٢} - ٦\, \text{ص} = ٠$

$\therefore ٣\, \text{ص}(\text{ص} - ٢) = ٠$ $\therefore \text{ص} = ٠$ أو ص = ٢

$\therefore$ النقط هي (٠ ، ٠) أو (٠ ، ٢)

② نجعل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ غير معرفة $\therefore ٣\, \text{ص} - ٣ = ٠$

$\therefore \text{ص} = ١$ بالتعويض في معادلة المنحنى

$٣ - ٦ + \text{س}^{٢} = ٠$

$\text{س}^{٢} = ٣ \Leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{٣}$

النقط : $(\sqrt{٣} ، ١)$ ، $(-\sqrt{٣} ، ١)$

③ نجعل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ظا}\, ٤٥^{\circ} = ١$ $\therefore \frac{-\text{س}}{٣\, \text{ص} - ٣} = ١$

$٣\, \text{ص} - ٣ = -\text{س}$ بالتعويض من معادلة المنحنى

$٣\, \text{ص}^{٢} - ٦\, \text{ص} + (-٣\, \text{ص} + ٣)^{٢} = ٠$

$٣\, \text{ص}^{٢} - ٦\, \text{ص} + (٩\, \text{ص}^{٢} - ١٨\, \text{ص} + ٩) = ٠$

$١٢\, \text{ص}^{٢} - ٢٤\, \text{ص} + ٩ = ٠$

$٤\, \text{ص}^{٢} - ٨\, \text{ص} + ٣ = ٠$

$(٢\, \text{ص} - ١)(٢\, \text{ص} - ٣) = ٠$

$\therefore \text{ص} = \frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{٣}{٢}$ النقطة $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

أو ص = $\frac{٣}{٢}$ ومنها س = $\frac{٣}{٢}$ النقطة $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right)$

٥

$٢\, \text{س} + \text{س}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص} + ٢\, \text{ص}\, \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\, \text{س} - \text{ص}}{\text{س} + ٢\, \text{ص}}$

$\because$ المماس // محور الصادات

$\therefore \text{س} + ٢\, \text{ص} = ٠$ $\therefore \text{س} = -٢\, \text{ص}$ (١)

وبالتعويض في معادلة المنحنى

$\therefore ٤\, \text{ص}^{٢} - ٢\, \text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٣$

$\therefore \text{ص}^{٢} = ١$ $\therefore \text{ص} = \pm ١$

ومن (١) : $\therefore \text{س} = \mp ٢$

$\therefore$ النقط هي (٢ ، −١) ، (−٢ ، ١)

٦

٧

(١) $\sqrt{\text{س}} = \text{س} - ٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ∴ ميل المستقيم المماس = $\frac{١}{٢}$

ميل العمودي عليه = ٢

(٢) $\sqrt{\text{س}} = \text{س} - ٢$ ، $\sqrt{\text{س}} = ٢$

بالتعويض في (١) $\sqrt{\text{س}} = ٢ - ٢ = ٠$

$٢\sqrt{\text{س}} = ٠$ ∴ $\sqrt{\text{س}} = ٠$

$\text{س} = ٤$ ∴ $\sqrt{\text{س}} = ٤$

$\text{ص} = ١٦$ ∴ النقطة (٤ ، ١٦)

٨

(١) $\text{ص}^٢ = \text{س}^٢ - ٧$

$٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

ميل المماس = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

الميل = ظاهـ $\frac{\pi}{٤}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = ١$

∴ س = ص

(٢)

من (٢) في (١) $\text{ص}^٢ = (\text{ص})^٢ - ٧$

$\frac{١}{٢}\text{ص}^٢ = ٧$ ∴ $\text{ص}^٢ = ١٤$ ∴ ص = ±$\sqrt{١٤}$

٩

$\text{ص} = \text{ظا س}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^٢\text{س}$

ميل المستقيم = $\frac{٨}{٤} = ٢$

بوضع $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$ ∴ $\text{قا}^٢\text{س} = ١$

∴ $\text{قا س} = ١$ ∴ $\text{جتا س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ $\text{س} = \frac{\pi}{٤}, \frac{٧\pi}{٤}, \frac{٩\pi}{٤}, \frac{١١\pi}{٤}$

يوجد قيمة ص لكل قيمة لـ س ∴ النقط هي

$(\frac{\pi}{٤}, \sqrt{٢}), (\frac{٧\pi}{٤}, \sqrt{٢}), (\frac{٩\pi}{٤}, \sqrt{٢}), (\frac{١١\pi}{٤}, \sqrt{٢})$

١٠

$\text{ص} = \text{ظا س}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^٢\text{س}$

ميل المستقيم = $\frac{٨}{٤} = ٢$

بوضع $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$ ∴ $\text{قا}^٢\text{س} = ١$

∴ $\text{قا س} = ١$ ∴ $\text{جتا س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٤}, \frac{٧\pi}{٤}, \frac{٩\pi}{٤}, \frac{١١\pi}{٤}$

يوجد قيمة ص لكل قيمة لـ س ∴ النقط هي

$(\frac{\pi}{٤}, \sqrt{٢}), (\frac{٧\pi}{٤}, \sqrt{٢}), (\frac{٩\pi}{٤}, \sqrt{٢}), (\frac{١١\pi}{٤}, \sqrt{٢})$

١١

(١) $\text{ص} = \text{جا س}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢}\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}$

ميل المماس = $\frac{١}{٢}$

ميل العمودي عليه = ٢

ميل المماس = ١

$\frac{١}{٢}\text{جا}\frac{\text{س}}{٢} = ١$

$\text{جا}\frac{\text{س}}{٢} = ٢$

$\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\pi}{٤}$ ∴ $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

النقطة هي $(\frac{\pi}{٢}, \ )$

١٢

(١) $\text{ص}^٢ = ٢\text{س}$ ، $\text{ص}^٢ + ٢ = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

$٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{ص}}$

∴ $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(١,\ ٠)} = ١$

∴ معادلة المماس هي $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ١} = ١$

أي أن $\text{ص} = \text{س} - ١$

(٢) $\text{ص}^٢ + ٢\text{س} = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

$٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢ = ٠$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-١}{\text{ص}}$

$(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(٢,\ -٢)} = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس هي $\frac{\text{ص} + ٢}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{٢}$

أي أن $\text{ص} + ٢ = \frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)$

$٢\text{ص} + ٤ = \text{س} - ٢$

$٢\text{ص} = \text{س} - ٦$

$\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س} - ٣$

١٣

(١) $\text{ص}^٢ = ٢\text{س}$ ، $\text{ص}^٢ + ٢ = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

$٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{ص}}$

∴ $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(٢,\ ٢)} = \frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس هي $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{٢}$

أي أن $\text{ص} - ٢ = \frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)$

(٢) $\text{ص}^٢ + ٢\text{س} = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

$٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢ = ٠$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-١}{\text{ص}}$

$(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(٢,\ -٢)} = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس هي $\frac{\text{ص} + ٢}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{٢}$

أي أن $\text{ص} + ٢ = \frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)$

$٢\text{ص} + ٤ = \text{س} - ٢$

$٢\text{ص} = \text{س} - ٦$

$\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س} - ٣$

١٤

(١) $\text{ص} = \text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} - ٢$ ∴ $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{\text{س}=١} = ٠$

∴ العمودي يوازي محور السينات ويكون معادلته

$\text{س} = ١$

(٢) ∵ $\text{س ص} = ١$ ∴ $\text{ص} = ٦\text{س}^{-١}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٦\text{س}^{-٢} = \frac{-٦}{\text{س}^٢}$

∴ $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{\text{س}=١} = \frac{-٦}{١} = -٦$

∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٦}$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{٦}$

أي أن $٦\text{س} - ٦\text{ص} + ٤ = ٠$

(٣) ∵ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٢\text{س} = ٩$

∴ $٢\text{س} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢ = ٠$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢ - ٢\text{س}}{٢\text{ص}}$

∴ $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(١,\ ٢)} = -٢$

∴ ميل المماس = -٢ ، ميل العمودي = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة العمودي هي $\text{ص} - ١ = \frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)$

أي أن $\text{س} - ٢\text{ص} + ١ = ٠$

(٤) $\text{س}^٣ + \text{ص}^٣ = ٦\text{س ص}$

∴ $٣\text{س}^٢ + ٣\text{ص}^٢\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\text{ص} + ٦\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{ص} - \text{س}^٢}{\text{ص}^٢ - ٢\text{س}}$

∴ $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(٢,\ ٢)} = -١$ ∴ ميل العمودي = ١

∴ معادلة العمودي هي $\text{ص} - ٢ = ١(\text{س} - ٢)$

أي أن $\text{س} - \text{ص} = ٠$

(٥) $\text{ص} = ٤ + \text{ظا س} - \text{قا}^٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{قا}^٢\text{س} - ٢\text{قا س} . \text{قا س ظا س}$

$= -\text{قا}^٢\text{س} - ٢\text{قا}^٢\text{س ظا س}$

∴ $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(\frac{\pi}{٤},\ ٢)} = -١$

∴ ميل المماس = ١ ∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٢}$

∴ عند $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$ ∴ $\text{ص} = ٢$

∴ النقطة $(\frac{\pi}{٤}, ٢)$

∴ معادلة العمودي هي

$(\text{ص} - ٢) = \frac{١}{٢}(\text{س} - \frac{\pi}{٤})$

أي أن $٤\text{س} - ٢٤\text{ص} - \pi + ٧٢ = ٠$

(٦) $\text{ص} = \text{س}|\text{س}|$ ∵ $\text{س} = ٢$

∴ $\text{ص} = \text{س}(\text{س})$ ، $\text{ص} = \text{س}^٢$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$ ∴ $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(٢,\ ٤)} = ٤$

∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٤}$

معادلة العمودي هي $\frac{\text{ص} - ٤}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{٤}$

أي أن $\text{س} - ٤\text{ص} + ١٨ = ٠$

١٥

∵ $\text{ص}^٢ = \text{س} - ١$ ∴ $٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢\text{ص}}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\text{ص} = -١$ ومنها $\text{س} = ٢$ ∴ النقطة $(٢ ، -١)$

∴ معادلة المماس هي $(\text{ص} + ١) = \frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)$

أي أن $\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س}$

١٦

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٢\text{ق س} + ١٢ = ٠$

∵ $(٤ ، -٢)$ تحقق المعادلة :

∴ $٤^٢ + (-٢)^٢ - ٢\text{ق}(٤) + ١٢ = ٠$

$٨\text{ق} = -٣٢$ ∴ $\text{ق} = ٤$

∴ معادلة المنحنى $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٨\text{س} + ١٢ = ٠$

$٢\text{س} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٨ = ٠$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤ - \text{س}}{\text{ص}}$

∴ $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(٢,\ ٢)} = ١$

∴ ميل المماس = ١ ∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٢}$

∴ عند $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$ ∴ $\text{ص} = ٢$

∴ النقطة $(\frac{\pi}{٤}, ٢)$

∴ معادلة العمودي هي

$(\text{ص} - ٢) = \frac{١}{٢}(\text{س} - \frac{\pi}{٤})$

أي أن $٤\text{س} - ٢٤\text{ص} - \pi + ٧٢ = ٠$

(٦) $\text{ص} = \text{س}|\text{س}|$ ∵ $\text{س} = ٢$

∴ $\text{ص} = \text{س}(\text{س})$ ، $\text{ص} = \text{س}^٢$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$ ∴ $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(٢,\ ٤)} = ٤$

∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٤}$

معادلة العمودي هي $\frac{\text{ص} - ٤}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{٤}$

أي أن $\text{س} + ٤\text{ص} + ١٨ = ٠$

١٧

$\text{ص} = \text{جا}^٢\text{س} - \text{جا س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{جا}^٢\text{س} + \text{جا س}$

∵ ميل المماس = ظا $\frac{\pi}{٤} = ١$

بوضع $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$ ∴ $٢\text{جا}^٢\text{س} + \text{جا س} = ١$

$٢(١ - \text{جا}^٢\text{س}) + \text{جا س} = ١$

$٤\text{جا}^٢\text{س} - \text{جا س} - ٢ = ٠$

∴ $(\text{جا س} - ١)(٤\text{جا س} + ٣) = ٠$

∴ $\text{جا س} = ١$ أو $\text{جا س} = \frac{-٣}{٤}$

(مرفوض لأن $\text{س} \in [٠ ، \pi]$)

∴ $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

∵ عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$ ∴ $\text{ص} = \text{صفر}$

النقطة هي $(\frac{\pi}{٢}, ٠)$

معادلة المماس $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}} = ١$

$٢\text{س} + ٢\text{ص} - \pi = ٠$

١٨

(١) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٢\text{ق}$

∴ $٢\text{س} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

∴ ميل المماس = $(\frac{\text{دص}}{\text{دس}})_{(٠ ، ٦)} = \frac{٢}{٣}$

∴ معادلة المماس $\frac{\text{ص} - ٦}{\text{س}} = \frac{٢}{٣}$

أي أن $٢\text{س} - ٣\text{ص} - ٢٦ = ٠$

∴ (س + ٣)(س − ٢) = ٠

∴ س = −٣ (مرفوض) ، ∴ س = ٢

وبفرض س = ٢ ∴ ص = ٢

نقطة التماس هي (٢ ، ٢)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٤}{٣}$ (٢ − س) ، ∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ ميل العمودي = $\frac{٣}{٤}$

∴ معادلة العمودي هي ص − ٢ = $\frac{٣}{٤}$ (س − ٢)

أي أن ٤ ص − ٣ س − ٢ = ٠

١٢

$\frac{دص}{دس}$ = −ط (س + ص) (١ + $\frac{دص}{دس}$)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = الصفر − $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{٣}{٢}$ ط (س + ص) = $\frac{١}{٢}$

∴ ط (س + ص) = ١ (١)

∴ س + ص = $\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، ٣ ، ... ∈ ص

∴ ص = ن ($\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، ٣ ، ...) − ط $\frac{٢}{٣}$ = صفر (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ط س = ١

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ، لأن س ∈ [٠ ، ٢π]

∴ نقطة التماس هي ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

∴ معادلة المماس هي ص − ٠ = −$\frac{١}{٢}$ (س − $\frac{٣}{٢}$)

∴ ٢ س + ٤ ص − ٣ = ٠

١٣

① ق (س) = د (س) × ن (س)

ق′ (س) = د′ (س) × ن (س) + د (س) × ن′ (س)

عند س = ٣

ق (٣) = د (٣) × ن (٣) = ٧

∴ النقطة (٣ ، ٧)

ق′ (٣) = ٠ × ٠ + ٢ × ٢ = ٤

∴ ميل المماس = ٤

∴ معادلة المماس ص − ٧ = ٤ (س − ٣)

∴ ص = ٤ س − ٥

② ق (س) = د (س) − ن (س)

ق′ (س) = $\frac{ن (س) د′ (س) − د (س) ن′ (س)}{(ن (س))^٢}$

عند س = ٢

ق (٢) = $\frac{٢ × ٢ − ٢ × ٠}{(٢)^٢}$ = ١ ، النقطة (٢ ، ١)

∴ ق′ (٢) = $\frac{٢ × ٢ − ٢ × ٠}{(٢)^٢}$ = ١٢

∴ ميل المماس = ١٢

∴ معادلة المماس $\frac{ص − ١}{س − ٢}$ = ١٢

∴ ١٢ س − ص − ٢٣ = ٠

∴ معادلة العمودي $\frac{ص − ١}{س − ٢}$ = −$\frac{١}{١٢}$

∴ س + ١٢ ص − ١٤ = ٠

③ ق (س) = د (ن (س))

∴ ق′ (س) = د′ (ن (س)) . ن′ (س)

∴ ق′ (٢) = د′ (ن (٢)) = د′ (٧) = −٢

∴ النقطة (٢ ، −٢)

∴ ق′ (٢) = د′ (ن (٢)) . ن′ (٢) = د′ (٧) = ٦

= ٢ × ٦ = ١٢

∴ ميل المماس = ١٢

∴ معادلة المماس $\frac{ص + ٢}{س − ٢}$ = ١٢

∴ ١٢ س − ص − ٢٨ = ٠

∴ معادلة العمودي $\frac{ص + ٢}{س − ٢}$ = −$\frac{١}{١٢}$

∴ س + ١٢ ص + ٢٤ = ٠

١٤

١	٠	٦	٣
٢	١	٧	٤
٣	٢	٨	٥
٤	٣	٩	٦
٥	٤	١٠	٧
٦	٥	١١	٨
٧	٦	١٢	٩
٨	٧	١٣	١٠
٩	٨	١٤	١١
١٠	٩	١٥	١٢
١١	١٠	١٦	١٣
١٢	١١	١٧	١٤
١٣	١٢	١٨	١٥
١٤	١٣	١٩	١٦
١٥	١٤	٢٠	١٧
١٦	١٥	٢١	١٨
١٧	١٦	٢٢	١٩
١٨	١٧	٢٣	٢٠
١٩	١٨	٢٤	٢١
٢٠	١٩	٢٥	٢٢
٢١	٢٠	٢٦	٢٣
٢٢	٢١	٢٧	٢٤
٢٣	٢٢	٢٨	٢٥
٢٤	٢٣	٢٩	٢٦

١٥

ص = س² − ٣ س + ٠

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س − ٣ (كمية موجبة لجميع قيم س)

∴ المماس عند أي نقطة هي أعلى كمية موجبة

∴ المماس عند أي نقطة هي المحصل ميل زاوية حادة على الاتجاه الموجب لمحور السينات

عند النقطة (١ ، ٢)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٦ ، ∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٦}$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص − ٢}{س − ١}$ = $\frac{−١}{٦}$

أي أن س + ٦ ص − ١٣ = ٠

١٦

٢ ص = ط ٢ س ، ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ ط ٢ س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ط ٢ س

① ط ٢ س = ٠

∴ ٢ س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ∴ س = $\frac{\pi}{٤}$

∴ ٢ س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ∴ س = $\frac{٣\pi}{٤}$

② عند س = $\frac{\pi}{٤}$ ، ∴ ص = $\frac{١}{٢}$

∴ النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$)

معادلة المماس ٢ ص − ١ = ٠

، معادلة العمودي س = $\frac{\pi}{٤}$

١٧

ص = س² − ٣ س + ٠

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س − ٣ (كمية موجبة لجميع قيم س)

∴ المماس عند أي نقطة هي أعلى كمية موجبة

∴ المماس عند أي نقطة هي المحصل ميل زاوية حادة على الاتجاه الموجب لمحور السينات

عند النقطة (١ ، ٢)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٦ ، ∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٦}$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص − ٢}{س − ١}$ = $\frac{−١}{٦}$

أي أن س + ٦ ص − ١٣ = ٠

١٨

ص = س² − ٣ س + ٠

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س − ٣ (كمية موجبة لجميع قيم س)

∴ المماس عند أي نقطة هي أعلى كمية موجبة

∴ المماس عند أي نقطة هي المحصل ميل زاوية حادة على الاتجاه الموجب لمحور السينات

عند النقطة (١ ، ٢)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٦ ، ∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٦}$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص − ٢}{س − ١}$ = $\frac{−١}{٦}$

أي أن س + ٦ ص − ١٣ = ٠

١٩

ص = س² − ٢ س + ٠

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س − ٢ ، ∴ ٢ س − ٢ = ٠

∴ س = ١ ، ∴ ص = ٠

∴ النقطة الأولى (١ ، ٠) ، ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

∴ النقطة الثانية هـ ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

∴ ($\frac{دص}{دس}$)$_{س = \frac{٣}{٢}}$ = ٢

∴ معادلة المماس عند هـ هي $\frac{ص − \frac{٣}{٤}}{س − \frac{٣}{٢}}$ = ٢

أي أن ٨ س − ٤ ص − ٩ = ٠

٢٠

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٤ س² − ٤ س − ١ (١)

∴ ($\frac{دص}{دس}$)$_{س = ١}$ = −١

∴ معادلة المماس هي ص − ٠ = −١ × (س − ١)

∴ ص = −س + ١

وبحل معادلة المماس والمنحنى معًا

∴ س³ − ٢ س² − س = −س + ١

∴ (س² − ١)² = ٠ ، ∴ س = ±١

[illegible]

∴ ميل العمودي [illegible]

معادلة العمودي عند النقطة [illegible] هي

[illegible]

٣٥

[illegible]

معادلة المستقيم هو [illegible]

معادلة المماس [illegible]

معادلة العمودي [illegible]

٣٦

∵ النقطة (س ، ص) تقع على منحنى الدالة فتحقق معادلته

∴ ص = س^{٢}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س

∴ ميل المماس عند النقطة (س ، س^{٢}) = ٢ س (١)

∵ المماس يمر بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (س ، س^{٢})

∴ ميل المماس = $\frac{س^{٢}}{س - ٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\frac{س^{٢}}{س - ٤}$ = ٢ س

∴ س^{٢} = ٢ س^{٢} − ٨ س

∴ س^{٢} − ٨ س = ٠

∴ س (س − ٨) = ٠

ومنها ص [illegible]

النقطة هي [illegible]

٣٧

ص = [illegible] ويفرض أن نقطة التماس هي (أ ، ب)

[illegible] (١)

[illegible]

معادلة المماس هي ص − ب = [illegible] (س − أ)

[illegible]

∵ النقطة (٣ ، ٥) تقع على المماس

[illegible]

∴ أ = ١ أو أ = ٥ ومنها ب = ١ أو ب = ٢٥

معادلة المماس هي ص − ١ = ٢ (س − ١)

أي أن ص − ٢ س + ١ = ٠

أو ص − ٢٥ = ١٠ (س − ٥)

أي أن ص − ١٠ س + ٢٥ = ٠

٣٨

∵ س^{٢} − ص^{٢} = ١٦ ونفرض أن نقطة التماس (أ ، ب)

∴ أ^{٢} − ب^{٢} = ١٦ (١)

، ٢ س − ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ومنها $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س}{ص}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(أ ، ب)}$ = $\frac{أ}{ب}$ ∵ ميل المماس = $\frac{ب + ٢}{أ − ٢}$

∴ $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{ب + ٢}{أ − ٢}$ ومنها أ^{٢} − ب^{٢} = ٢ (أ + ب) (٢)

من (١) ، (٢) ب = ٨ − أ (٣)

[illegible]

معادلة المماس [illegible]

أي أن [illegible]

٣٩

[illegible]

[illegible] ميل المستقيم المعطى = ٣

[illegible] = ١٢

[illegible]

بحل المعادلتين (١) ، (٢) [illegible]

٤٠

ص = ٢ س^{٢} − [illegible]

بوضع ص = ٠ [illegible]

∴ (٢ س − ١) (س − ١) = ٠

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ∴ النقطة ($\frac{١}{٢}$ ، ٠)

، ميل المماس = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{١}{٢} ، ٠)}$ = ١

أ س = ١ ∴ النقطة (١ ، ٠)

، ميل المماس $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٠)}$ = ١

∴ حاصل ضرب الميلين = −١

∴ المماسان متعامدان

٤١

ص = س^{٢} + ٦ س + ٥

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س + ٦ ∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ [illegible]

∴ ص = س^{٣} − س^{٢} − س + ١

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢} − ٢ س − ١

[illegible]

معادلة المماس هي ص [illegible]

أي أن [illegible]

٤٢

بفرض ص = س^{٢} تقطع المستقيم الأفقي ص = ٢ في النقط ($\sqrt{٢}$ ، ٢) ، (− $\sqrt{٢}$ ، ٢)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س

∴ ميل المماس $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\sqrt{٢} ، ٢)}$ = ٢ $\sqrt{٢}$

معادلة المماس الأول (ص − ٢) = ٢ $\sqrt{٢}$ (س − $\sqrt{٢}$)

∴ ٢ $\sqrt{٢}$ س − ص − ٢ (١)

وميل المماس الثاني $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ [illegible] = − ٢ $\sqrt{٢}$

∴ معادلة المماس الثاني ص − ٢ = − ٢ $\sqrt{٢}$ (س + $\sqrt{٢}$)

٢ $\sqrt{٢}$ س + ص + ٢ = ٠ (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) [illegible] ٤ $\sqrt{٢}$ س = ٠ ومنها س

والتعويض ص = − ٢

[illegible]

[illegible] ٣ $\sqrt{٣}$

[illegible]

[illegible] ∴ ب = ١

٥٠

د (س) = [illegible] س ≤ ٢ ، [illegible] س > ٢

∴ الميل = ظا ه = ٦

∴ د′ (٢) = ٦ ∴ ب = ٦

، د (س) متصلة عند س = ٢

[illegible]

٥١

س^{٢} + ص^{٢} = [illegible] (١)

٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = − $\frac{س}{ص}$

[illegible] ∴ س = − ٢ ص

بالتعويض في (١) ٤ ص^{٢} + ص^{٢} = ٥

∴ ٥ ص^{٢} = ٥ ص = ± ١

عند ص = ١ ∴ س = −٢ ∴ النقطة (−٢ ، ١)

، معادلة المماس [illegible] (س + ٢)

أي أن ٢ س − ص + ٥ = ٠

، عند ص = −١ ، س = ٢

∴ النقطة (٢ ، −١)

ص + ١ = ٢ (س − ٢)

أي أن ٢ س − ص − ٥ = ٠

٥٢

[illegible] (١)

[illegible]

∴ ميل المستقيم المعطى هو −٢

∴ $\frac{ص}{س}$ = −٢ ∴ ص = ٢ س (٢)

وبالتعويض من (٢) في (١) ∴ ٢ س^{٢} = ٨

∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

ومن (٢) ∴ ص = ± ٤

∴ النقط هي (٢ ، ٤) ، (−٢ ، −٤)

∴ معادلة المماس الأول $\frac{ص − ٤}{س − ٢}$ = −٢

أي أن ص + ٢ س − ٨ = ٠

، معادلة المماس الثاني $\frac{ص + ٤}{س + ٢}$ = −٢

أي أن ص + ٢ س + ٨ = ٠

٥٣

ص = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ س + ٥

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س^{٢} + ٦ س + ٤

∴ ميل المماس عند النقطة (١ ، ٢) = ٤

بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤

٦ س^{٢} + ٦ س + ٤ = ٤

٦ س (س + ١) = ٠

س = ٠ ومنها ص = ٥ أو س = −١ ومنها ص = ٢

∴ النقطة الأخرى التي يكون عندها المماس له نفس الميل هي (٠ ، ٥)

معادلة المماس الآخر $\frac{ص − ٥}{س}$ = ٤

∴ ٤ س − ص + ٥

٥٤

ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢} − ٣

∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{١}{٩}$

∴ ميل المماس المطلوب = −٩ [illegible]

∴ ٣ س^{٢} − ٣ = ٩ ∴ س^{٢} = ٤

∴ س = ± ٢

∴ نقطتا التماس هما (−٢ ، ٣) ، (٢ ، ٧)

∴ معادلتا المماسين هما

$\frac{ص − ٧}{س − ٢}$ = ٩ أي أن ص − ٩ س + ١١ = ٠

، $\frac{ص − ٣}{س + ٢}$ = ٩ أي أن ص − ٩ س − ٢١ = ٠

٥٥

∵ ص = س + $\frac{١}{س}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$

، ∵ ميل المستقيم المعطى = −٣

∴ ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$ = −٣ ومنها س^{٢} = $\frac{١}{٤}$

∴ س = ± $\frac{١}{٢}$

عند س = $\frac{١}{٢}$ ومنها ص = $\frac{٥}{٢}$

∴ النقطة ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)

∴ معادلة المماس ص − $\frac{٥}{٢}$ = −٣ (س − $\frac{١}{٢}$)

أي أن ٣ س + ص − ٤ = ٠

، عند س = − $\frac{١}{٢}$ ومنها ص = − $\frac{٥}{٢}$

معادلة المماس ص + $\frac{٥}{٢}$ = −٣ (س + $\frac{١}{٢}$)

أي أن ٣ س + ص + ٤ = ٠

٥٦

بوضع ص = ٠ في معادلة المنحنى

∴ س^{٢} − س − ٢ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ س = ٢ أو س = −١

∴ نقطتا التقاطع مع محور السينات هما (٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

∵ معادلة المنحنى هي

س^{٢} + ص^{٢} − س + ٢ ص − ٢

∴ ص^{٢} + ٢ ص = ٢ + س − س^{٢}

وبإجراء الاشتقاق الضمني بالنسبة لـ س

∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ ص + ٢) = ١ − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١ − ٢ س}{٢ ص + ٢}$

∴ ميل المماس عند النقطة (٢ ، ٠)

= $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٢ ، ٠)}$ = $\frac{١ − ٢ (٢)}{٢ (٠) + ٢}$ = $\frac{−٣}{٢}$

∴ ميل العمودي = $\frac{٢}{٣}$

وتكون معادلة العمودي عند هذه النقطة $\frac{ص}{س − ٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ ٣ ص = ٢ س − ٤

، ميل المماس عند النقطة (−١ ، ٠)

$\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(−١ ، ٠)}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ ميل العمودي = − $\frac{٢}{٣}$

وتكون معادلة العمودي عند هذه النقطة $\frac{ص}{س + ١}$ = − $\frac{٢}{٣}$

∴ ٣ ص = −٢ س − ٢

٥٧

∵ د (س) = س^{٢} ، ر (س) = $\frac{١}{س}$

نوجد نقط التقاطع س^{٢} = $\frac{١}{س}$ ∴ س^{٣} = ١

∴ س = ١ ومنها ص = ١ ∴ النقطة (١ ، ١)

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ قطع محور الصادات عند (،) [illegible]

مساحة المثلث المطلوب

= [illegible] وحدة مربعة

١١

س² + ٢ س ص + ص² + ١ = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٢ س + ٢ ص + ٢ س [illegible] + ٢ ص [illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible] = [illegible]

([illegible]) = [illegible] ∴ ميل المماس = ١

∴ ميل العمودي = −١

∴ معادلة المماس [illegible] = ١ منها س + ص = ٢

• معادلة العمودي [illegible] = ١ منها س − ص = ٠

∴ المماس يقطع محور السينات في نقطة ب (٢ ، ٠)

• العمودي يقطع محور السينات في نقطة جـ (٠ ، ٠)

∴ ب جـ = ٢ − ٠ = ٢ وحدة طول

∴ مساحة △ ا ب جـ = ½ × ٢ × ١ = ١ وحدة مربعة

١٢

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س² − ٢ س − ٢٤ = ٠

∴ (س − ٦) (س + ٤) = ٠

∴ س = ٦ أو س = −٤

∴ المنحنى يقطع محور السينات في (٦ ، ٠) ، (−٤ ، ٠)

∵ س² + ص² − ٢ س + ٤ ص − ٢٤ = ٠

∴ ٢ س + ٢ ص [illegible] + ٤ [illegible] = ٠

[illegible]

∴ معادلة المماس [illegible]

أي أن [illegible] ص − ١ = ٠

∴ [illegible] = ١

∴ معادلة العمودي [illegible]

أي أن [illegible] ص = ٠

∴ [illegible] = ٠

∴ معادلة المماس [illegible] = ٠

أي أن ٥ س − ٢ ص = ٠

وبحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ س = ٠ ، ص = ١٢

∴ المماس يقاطعها عند (٠ ، ١٢)

∴ المثلث المكون من محور السينات والمماس

ارتفاعه = ١٢ وحدة طول

وطول قاعدته = ٦ − (−٤) = ١٠ وحدة طول

∴ مساحة المثلث = ½ × ١٠ × ١٢

= ٦٠ وحدة مربعة

١٣

د (س) = س²

∴ د′ (س) = ٢ س

∴ د′ (٢) = ٤ ∴ ميل المماس = ٤

∴ معادلة المماس [illegible] = ٤

أي أن ٤ س − ص = ٤

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١

∴ المماس يقطع محور السينات في (١ ، ٠)

• ∵ ميل العمودي = [illegible]

∴ معادلة العمودي [illegible] = [illegible]

أي أن س + ٤ ص − ١٨ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١٨

∴ العمودي يقطع محور السينات في (١٨ ، ٠)

[illegible]

١٤

[illegible]

١٥

[illegible]

١٦

[illegible]

١٧

[illegible]

١٨

[illegible]

١٩

[illegible]

٢٠

[illegible]

إرشادات لحل رقم ٢٠

[illegible]

① [illegible] = ١ أي أن س − ص = ١ = ٠

② [illegible] = ١ أي أن س + ص − ١ = ٠

ثانيًا عند النقطة ب (٠ ، ١)

م₁ = −١ ، م₂ = ١ ∴ م₁ × م₂ = −١

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (٠ ، ١)

معادلتا المماسين

① [illegible] = −١ أي أن س + ص − ١ = ٠

② [illegible] = ١ أي أن س − ص − ١ = ٠

١٧

∵ النقطة (أ ، ب) تحقق معادلتي المستقيم والمنحنى

∴ المستقيم يقطع المنحنى في النقطة (أ ، ب)

∴ ∵ ([illegible])² + ([illegible])² = ٢

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

[illegible] + [illegible] = [illegible]

عند النقطة (أ ، ب)

[illegible] × ١ + [illegible] × ١ = [illegible]

∴ [illegible] = [illegible] = [illegible]

(ميل المماس عند (أ ، ب))

∵ ميل المستقيم = −[illegible] = [illegible]

∴ المستقيم يمس المنحنى عند نقطة (أ ، ب) التي تقع على كليهما لأي قيمة لـ ن

١٨

[illegible] + [illegible] = ٠ ، [illegible] = [illegible]

∴ ([illegible]) (س ، ص) = [illegible]

معادلة المماس [illegible]

− [illegible] س + س [illegible] = [illegible] س ص − [illegible] س ص

(بالقسمة على [illegible])

[illegible] − [illegible] = [illegible]

[illegible] − [illegible] = [illegible] ، [illegible] = [illegible]

∴ الخطين يقطعان من محوري الإحداثيات قطعتين

[illegible] ، [illegible]

مجموعهما = [illegible] + [illegible]

[illegible] ([illegible] + [illegible])

= [illegible] × [illegible] = مقدار ثابت

١٩

معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويبعد ١ وحدة طولية في الاتجاه الموجب لمحور السينات هي س = ١

وبحل معادلة المنحنى ص² = س² + س − ١

∴ ص² = ١ ∴ ص = ١

∴ التقاطع عند (١ ، ١) ، (١ ، −١)

ص² = س² + س − ١ ∴ ٢ ص [illegible] = ٢ س + ١

∴ [illegible] = [illegible]

عند (١ ، ١) ∴ ([illegible])(١ ، ١) = [illegible]

∴ معادلة المماس [illegible] = [illegible]

أي أن ٣ س − ٢ ص − ١ = ٠

• ميل العمودي = [illegible]

∴ معادلة العمودي [illegible] = [illegible]

∴ ٢ س + ٣ ص − ٥ = ٠

عند (١ ، ١) ∴ ([illegible])(١ ، ١) = [illegible]

معادلة المماس [illegible] = [illegible]

∴ ٢ س + ٣ ص − ١ = ٠ ، ميل العمودي = [illegible]

أسئلة الدرس ٥

٤٤

(أ) ١ (ب) ٠ (ج) ١

(د) ١ (هـ) ٠ (و) ١

٤٥

[illegible]

٤٦

[illegible]

٤٧

[illegible]

٤٨

[illegible]

٤٩

[illegible]

٥٠

[illegible]

٥١

[illegible]

٥٢

[illegible]

٥٣

[illegible]

٥٤

[illegible]

٥٥

[illegible]

٥٦

[illegible]

٥٧

[illegible]

٥٨

[illegible]

٥٩

[illegible]

٦٠

[illegible]

٦١

[illegible]

٦٢

[illegible]

٦٣

[illegible]

٦٤

[illegible]

٦٥

[illegible]

٦٦

[illegible]

٦٧

[illegible]

٦٨

[illegible]

٦٩

[illegible]

٧٠

[illegible]

٧١

[illegible]

٧٢

[illegible]

٧٣

[illegible]

٧٤

[illegible]

٧٥

[illegible]

٧٦

[illegible]

٧٧

[illegible]

٧٨

[illegible]

٧٩

[illegible]

٨٠

[illegible]

٨١

[illegible]

٨٢

[illegible]

٨٣

[illegible]

٨٤

[illegible]

٨٥

[illegible]

٨٦

[illegible]

٨٧

[illegible]

٨٨

[illegible]

٨٩

[illegible]

٩٠

[illegible]

٩١

[illegible]

٩٢

[illegible]

٩٣

[illegible]

٩٤

[illegible]

٩٥

[illegible]

٩٦

[illegible]

٩٧

[illegible]

٩٨

[illegible]

٩٩

[illegible]

١٠٠

[illegible]

١٠١

[illegible]

١٠٢

[illegible]

١٠٣

[illegible]

١٠٤

[illegible]

١٠٥

[illegible]

١٠٦

[illegible]

١٠٧

[illegible]

١٠٨

[illegible]

١٠٩

[illegible]

١١٠

[illegible]

١١١

[illegible]

١١٢

[illegible]

١١٣

[illegible]

١١٤

[illegible]

١١٥

[illegible]

١١٦

[illegible]

١١٧

[illegible]

١١٨

[illegible]

١١٩

[illegible]

١٢٠

[illegible]

١٢١

[illegible]

١٢٢

[illegible]

١٢٣

[illegible]

١٢٤

[illegible]

١٢٥

[illegible]

١٢٦

[illegible]

١٢٧

[illegible]

١٢٨

[illegible]

١٢٩

[illegible]

١٣٠

[illegible]

١٣١

[illegible]

١٣٢

[illegible]

١٣٣

[illegible]

١٣٤

[illegible]

١٣٥

[illegible]

١٣٦

[illegible]

١٣٧

[illegible]

١٣٨

[illegible]

١٣٩

[illegible]

١٤٠

[illegible]

١٤١

[illegible]

١٤٢

[illegible]

١٤٣

[illegible]

١٤٤

[illegible]

١٤٥

[illegible]

١٤٦

[illegible]

١٤٧

[illegible]

١٤٨

[illegible]

١٤٩

[illegible]

١٥٠

[illegible]

١٥١

[illegible]

١٥٢

[illegible]

١٥٣

[illegible]

١٥٤

[illegible]

١٥٥

[illegible]

١٥٦

[illegible]

١٥٧

[illegible]

١٥٨

[illegible]

١٥٩

[illegible]

١٦٠

[illegible]

١٦١

[illegible]

١٦٢

[illegible]

١٦٣

[illegible]

١٦٤

[illegible]

١٦٥

[illegible]

١٦٦

[illegible]

١٦٧

[illegible]

١٦٨

[illegible]

١٦٩

[illegible]

١٧٠

[illegible]

١٧١

[illegible]

١٧٢

[illegible]

١٧٣

[illegible]

١٧٤

[illegible]

١٧٥

[illegible]

١٧٦

[illegible]

١٧٧

[illegible]

١٧٨

[illegible]

١٧٩

[illegible]

١٨٠

[illegible]

١٨١

[illegible]

١٨٢

[illegible]

١٨٣

[illegible]

١٨٤

[illegible]

١٨٥

[illegible]

١٨٦

[illegible]

١٨٧

[illegible]

١٨٨

[illegible]

١٨٩

[illegible]

١٩٠

[illegible]

١٩١

[illegible]

١٩٢

[illegible]

١٩٣

[illegible]

١٩٤

[illegible]

١٩٥

[illegible]

١٩٦

[illegible]

١٩٧

[illegible]

١٩٨

[illegible]

١٩٩

[illegible]

٢٠٠

[illegible]

٢٠١

[illegible]

٢٠٢

[illegible]

٢٠٣

[illegible]

٢٠٤

[illegible]

٢٠٥

[illegible]

٢٠٦

[illegible]

٢٠٧

[illegible]

٢٠٨

[illegible]

٢٠٩

[illegible]

٢١٠

[illegible]

٢١١

[illegible]

٢١٢

[illegible]

٢١٣

[illegible]

٢١٤

[illegible]

٢١٥

[illegible]

٢١٦

[illegible]

٢١٧

[illegible]

٢١٨

[illegible]

٢١٩

[illegible]

٢٢٠

[illegible]

٢٢١

[illegible]

٢٢٢

[illegible]

٢٢٣

[illegible]

٢٢٤

[illegible]

٢٢٥

[illegible]

٢٢٦

[illegible]

٢٢٧

[illegible]

٢٢٨

[illegible]

٢٢٩

[illegible]

٢٣٠

[illegible]

٢٣١

[illegible]

٢٣٢

[illegible]

٢٣٣

[illegible]

٢٣٤

[illegible]

٢٣٥

[illegible]

٢٣٦

[illegible]

٢٣٧

[illegible]

٢٣٨

[illegible]

٢٣٩

[illegible]

٢٤٠

[illegible]

٢٤١

[illegible]

٢٤٢

[illegible]

٢٤٣

[illegible]

٢٤٤

[illegible]

٢٤٥

[illegible]

٢٤٦

[illegible]

٢٤٧

[illegible]

٢٤٨

[illegible]

٢٤٩

[illegible]

٢٥٠

[illegible]

٢٥١

[illegible]

٢٥٢

[illegible]

٢٥٣

[illegible]

٢٥٤

[illegible]

٢٥٥

[illegible]

٢٥٦

[illegible]

٢٥٧

[illegible]

٢٥٨

[illegible]

٢٥٩

[illegible]

٢٦٠

[illegible]

٢٦١

[illegible]

٢٦٢

[illegible]

٢٦٣

[illegible]

٢٦٤

[illegible]

٢٦٥

[illegible]

٢٦٦

[illegible]

٢٦٧

[illegible]

٢٦٨

[illegible]

٢٦٩

[illegible]

٢٧٠

[illegible]

٢٧١

[illegible]

٢٧٢

[illegible]

٢٧٣

[illegible]

٢٧٤

[illegible]

٢٧٥

[illegible]

٢٧٦

[illegible]

٢٧٧

[illegible]

٢٧٨

[illegible]

٢٧٩

[illegible]

٢٨٠

[illegible]

٢٨١

[illegible]

٢٨٢

[illegible]

٢٨٣

[illegible]

٢٨٤

[illegible]

٢٨٥

[illegible]

٢٨٦

[illegible]

٢٨٧

[illegible]

٢٨٨

[illegible]

٢٨٩

[illegible]

٢٩٠

[illegible]

٢٩١

[illegible]

٢٩٢

[illegible]

٢٩٣

[illegible]

٢٩٤

[illegible]

٢٩٥

[illegible]

٢٩٦

[illegible]

٢٩٧

[illegible]

٢٩٨

[illegible]

٢٩٩

[illegible]

٣٠٠

[illegible]

٣٠١

[illegible]

٣٠٢

[illegible]

٣٠٣

[illegible]

٣٠٤

[illegible]

٣٠٥

[illegible]

٣٠٦

[illegible]

٣٠٧

[illegible]

٣٠٨

[illegible]

٣٠٩

[illegible]

٣١٠

[illegible]

٣١١

[illegible]

٣١٢

[illegible]

٣١٣

[illegible]

٣١٤

[illegible]

٣١٥

[illegible]

٣١٦

[illegible]

٣١٧

[illegible]

٣١٨

[illegible]

٣١٩

[illegible]

٣٢٠

[illegible]

٣٢١

[illegible]

٣٢٢

[illegible]

٣٢٣

[illegible]

٣٢٤

[illegible]

٣٢٥

[illegible]

٣٢٦

[illegible]

٣٢٧

[illegible]

٣٢٨

[illegible]

٣٢٩

[illegible]

٣٣٠

[illegible]

٣٣١

[illegible]

٣٣٢

[illegible]

٣٣٣

[illegible]

٣٣٤

[illegible]

٣٣٥

[illegible]

٣٣٦

[illegible]

٣٣٧

[illegible]

٣٣٨

[illegible]

٣٣٩

[illegible]

٣٤٠

[illegible]

٣٤١

[illegible]

٣٤٢

[illegible]

٣٤٣

[illegible]

٣٤٤

[illegible]

٣٤٥

[illegible]

٣٤٦

[illegible]

٣٤٧

[illegible]

٣٤٨

[illegible]

٣٤٩

[illegible]

٣٥٠

[illegible]

٣٥١

[illegible]

٣٥٢

[illegible]

٣٥٣

[illegible]

٣٥٤

[illegible]

٣٥٥

[illegible]

٣٥٦

[illegible]

٣٥٧

[illegible]

٣٥٨

[illegible]

٣٥٩

[illegible]

٣٦٠

[illegible]

٣٦١

[illegible]

٣٦٢

[illegible]

٣٦٣

[illegible]

٣٦٤

[illegible]

٣٦٥

[illegible]

٣٦٦

[illegible]

٣٦٧

[illegible]

٣٦٨

[illegible]

٣٦٩

[illegible]

٣٧٠

[illegible]

٣٧١

[illegible]

٣٧٢

[illegible]

٣٧٣

[illegible]

٣٧٤

[illegible]

٣٧٥

[illegible]

٣٧٦

[illegible]

٣٧٧

[illegible]

٣٧٨

[illegible]

٣٧٩

[illegible]

٣٨٠

[illegible]

٣٨١

[illegible]

٣٨٢

[illegible]

٣٨٣

[illegible]

٣٨٤

[illegible]

٣٨٥

[illegible]

٣٨٦

[illegible]

٣٨٧

[illegible]

٣٨٨

[illegible]

٣٨٩

[illegible]

٣٩٠

[illegible]

٣٩١

[illegible]

٣٩٢

[illegible]

٣٩٣

[illegible]

٣٩٤

[illegible]

٣٩٥

[illegible]

٣٩٦

[illegible]

٣٩٧

[illegible]

٣٩٨

[illegible]

٣٩٩

[illegible]

٤٠٠

[illegible]

٤٠١

[illegible]

٤٠٢

[illegible]

٤٠٣

[illegible]

٤٠٤

[illegible]

٤٠٥

[illegible]

٤٠٦

[illegible]

٤٠٧

[illegible]

٤٠٨

[illegible]

٤٠٩

[illegible]

٤١٠

[illegible]

٤١١

[illegible]

٤١٢

[illegible]

٤١٣

[illegible]

٤١٤

[illegible]

٤١٥

[illegible]

٤١٦

[illegible]

٤١٧

[illegible]

٤١٨

[illegible]

٤١٩

[illegible]

٤٢٠

[illegible]

٤٢١

[illegible]

٤٢٢

[illegible]

٤٢٣

[illegible]

٤٢٤

[illegible]

٤٢٥

[illegible]

٤٢٦

[illegible]

٤٢٧

[illegible]

٤٢٨

[illegible]

٤٢٩

[illegible]

٤٣٠

[illegible]

٤٣١

[illegible]

٤٣٢

[illegible]

٤٣٣

[illegible]

٤٣٤

[illegible]

٤٣٥

[illegible]

٤٣٦

[illegible]

٤٣٧

[illegible]

٤٣٨

[illegible]

٤٣٩

[illegible]

٤٤٠

[illegible]

٤٤١

[illegible]

٤٤٢

[illegible]

٤٤٣

[illegible]

٤٤٤

[illegible]

٤٤٥

[illegible]

٤٤٦

[illegible]

٤٤٧

[illegible]

٤٤٨

[illegible]

٤٤٩

[illegible]

٤٥٠

[illegible]

٤٥١

[illegible]

٤٥٢

[illegible]

٤٥٣

[illegible]

٤٥٤

[illegible]

٤٥٥

[illegible]

٤٥٦

[illegible]

٤٥٧

[illegible]

٤٥٨

[illegible]

٤٥٩

[illegible]

٤٦٠

[illegible]

٤٦١

[illegible]

٤٦٢

[illegible]

٤٦٣

[illegible]

٤٦٤

[illegible]

٤٦٥

[illegible]

٤٦٦

[illegible]

٤٦٧

[illegible]

٤٦٨

[illegible]

٤٦٩

[illegible]

٤٧٠

[illegible]

٤٧١

[illegible]

٤٧٢

[illegible]

٤٧٣

[illegible]

٤٧٤

[illegible]

٤٧٥

[illegible]

٤٧٦

[illegible]

٤٧٧

[illegible]

٤٧٨

[illegible]

٤٧٩

[illegible]

٤٨٠

[illegible]

٤٨١

[illegible]

٤٨٢

[illegible]

٤٨٣

[illegible]

٤٨٤

[illegible]

٤٨٥

[illegible]

٤٨٦

[illegible]

٤٨٧

[illegible]

٤٨٨

[illegible]

٤٨٩

[illegible]

٤٩٠

[illegible]

٤٩١

[illegible]

٤٩٢

[illegible]

٤٩٣

[illegible]

٤٩٤

[illegible]

٤٩٥

[illegible]

٤٩٦

[illegible]

٤٩٧

[illegible]

٤٩٨

[illegible]

٤٩٩

[illegible]

٥٠٠

[illegible]

٥٠١

[illegible]

٥٠٢

[illegible]

٥٠٣

[illegible]

٥٠٤

[illegible]

٥٠٥

[illegible]

٥٠٦

[illegible]

٥٠٧

[illegible]

٥٠٨

[illegible]

٥٠٩

[illegible]

٥١٠

[illegible]

٥١١

[illegible]

٥١٢

[illegible]

٥١٣

[illegible]

٥١٤

[illegible]

٥١٥

[illegible]

٥١٦

[illegible]

٥١٧

[illegible]

٥١٨

[illegible]

٥١٩

[illegible]

٥٢٠

[illegible]

٥٢١

[illegible]

٥٢٢

[illegible]

٥٢٣

[illegible]

٥٢٤

[illegible]

٥٢٥

[illegible]

٥٢٦

[illegible]

٥٢٧

[illegible]

٥٢٨

[illegible]

٥٢٩

[illegible]

٥٣٠

[illegible]

٥٣١

[illegible]

٥٣٢

[illegible]

٥٣٣

[illegible]

٥٣٤

[illegible]

٥٣٥

[illegible]

٥٣٦

[illegible]

٥٣٧

[illegible]

٥٣٨

[illegible]

٥٣٩

[illegible]

٥٤٠

[illegible]

٥٤١

[illegible]

٥٤٢

[illegible]

٥٤٣

[illegible]

٥٤٤

[illegible]

٥٤٥

[illegible]

٥٤٦

[illegible]

٥٤٧

[illegible]

٥٤٨

[illegible]

٥٤٩

[illegible]

٥٥٠

[illegible]

٥٥١

[illegible]

٥٥٢

[illegible]

٥٥٣

[illegible]

٥٥٤

[illegible]

٥٥٥

[illegible]

٥٥٦

[illegible]

٥٥٧

[illegible]

٥٥٨

[illegible]

٥٥٩

[illegible]

٥٦٠

[illegible]

٥٦١

[illegible]

٥٦٢

[illegible]

٥٦٣

[illegible]

٥٦٤

[illegible]

٥٦٥

[illegible]

٥٦٦

[illegible]

٥٦٧

[illegible]

٥٦٨

[illegible]

٥٦٩

[illegible]

٥٧٠

[illegible]

٥٧١

[illegible]

٥٧٢

[illegible]

٥٧٣

[illegible]

٥٧٤

[illegible]

٥٧٥

[illegible]

٥٧٦

[illegible]

٥٧٧

[illegible]

٥٧٨

[illegible]

٥٧٩

[illegible]

٥٨٠

[illegible]

٥٨١

[illegible]

٥٨٢

[illegible]

٥٨٣

[illegible]

٥٨٤

[illegible]

٥٨٥

[illegible]

٥٨٦

[illegible]

٥٨٧

[illegible]

٥٨٨

[illegible]

٥٨٩

[illegible]

٥٩٠

[illegible]

٥٩١

[illegible]

٥٩٢

[illegible]

٥٩٣

[illegible]

٥٩٤

[illegible]

٥٩٥

[illegible]

٥٩٦

[illegible]

٥٩٧

[illegible]

٥٩٨

[illegible]

٥٩٩

[illegible]

٦٠٠

[illegible]

٦٠١

[illegible]

٦٠٢

[illegible]

٦٠٣

[illegible]

٦٠٤

[illegible]

٦٠٥

[illegible]

٦٠٦

[illegible]

٦٠٧

[illegible]

٦٠٨

[illegible]

٦٠٩

[illegible]

٦١٠

[illegible]

٦١١

[illegible]

٦١٢

[illegible]

٦١٣

[illegible]

٦١٤

[illegible]

٦١٥

[illegible]

٦١٦

[illegible]

٦١٧

[illegible]

٦١٨

[illegible]

٦١٩

[illegible]

٦٢٠

[illegible]

٦٢١

[illegible]

٦٢٢

[illegible]

٦٢٣

[illegible]

٦٢٤

[illegible]

٦٢٥

[illegible]

٦٢٦

[illegible]

٦٢٧

[illegible]

٦٢٨

[illegible]

٦٢٩

[illegible]

٦٣٠

[illegible]

٦٣١

[illegible]

٦٣٢

[illegible]

٦٣٣

[illegible]

٦٣٤

[illegible]

٦٣٥

[illegible]

٦٣٦

[illegible]

٦٣٧

[illegible]

٦٣٨

[illegible]

٦٣٩

[illegible]

٦٤٠

[illegible]

٦٤١

[illegible]

٦٤٢

[illegible]

٦٤٣

[illegible]

٦٤٤

[illegible]

٦٤٥

[illegible]

٦٤٦

[illegible]

٦٤٧

[illegible]

٦٤٨

[illegible]

٦٤٩

[illegible]

٦٥٠

[illegible]

٦٥١

[illegible]

٦٥٢

[illegible]

٦٥٣

[illegible]

٦٥٤

[illegible]

٦٥٥

[illegible]

٦٥٦

[illegible]

٦٥٧

[illegible]

٦٥٨

[illegible]

٦٥٩

[illegible]

٦٦٠

[illegible]

٦٦١

[illegible]

٦٦٢

[illegible]

٦٦٣

[illegible]

٦٦٤

[illegible]

٦٦٥

[illegible]

٦٦٦

[illegible]

٦٦٧

[illegible]

٦٦٨

[illegible]

٦٦٩

[illegible]

٦٧٠

[illegible]

٦٧١

[illegible]

٦٧٢

[illegible]

٦٧٣

[illegible]

٦٧٤

[illegible]

٦٧٥

[illegible]

٦٧٦

[illegible]

٦٧٧

[illegible]

٦٧٨

[illegible]

٦٧٩

[illegible]

٦٨٠

[illegible]

٦٨١

[illegible]

٦٨٢

[illegible]

٦٨٣

[illegible]

٦٨٤

[illegible]

٦٨٥

[illegible]

٦٨٦

[illegible]

٦٨٧

[illegible]

٦٨٨

[illegible]

٦٨٩

[illegible]

٦٩٠

[illegible]

٦٩١

[illegible]

٦٩٢

[illegible]

٦٩٣

[illegible]

٦٩٤

[illegible]

٦٩٥

[illegible]

٦٩٦

[illegible]

٦٩٧

[illegible]

٦٩٨

[illegible]

٦٩٩

[illegible]

٧٠٠

[illegible]

٧٠١

[illegible]

٧٠٢

[illegible]

٧٠٣

[illegible]

٧٠٤

[illegible]

٧٠٥

[illegible]

٧٠٦

[illegible]

٧٠٧

[illegible]

٧٠٨

[illegible]

٧٠٩

[illegible]

٧١٠

[illegible]

٧١١

[illegible]

٧١٢

[illegible]

٧١٣

[illegible]

٧١٤

[illegible]

٧١٥

[illegible]

٧١٦

[illegible]

٧١٧

[illegible]

٧١٨

[illegible]

٧١٩

[illegible]

٧٢٠

[illegible]

٧٢١

[illegible]

٧٢٢

[illegible]

٧٢٣

[illegible]

٧٢٤

[illegible]

٧٢٥

[illegible]

٧٢٦

[illegible]

٧٢٧

[illegible]

٧٢٨

[illegible]

٧٢٩

[illegible]

٧٣٠

[illegible]

٧٣١

[illegible]

٧٣٢

[illegible]

٧٣٣

[illegible]

٧٣٤

[illegible]

٧٣٥

[illegible]

٧٣٦

[illegible]

٧٣٧

[illegible]

٧٣٨

[illegible]

٧٣٩

[illegible]

٧٤٠

[illegible]

٧٤١

[illegible]

٧٤٢

[illegible]

٧٤٣

[illegible]

٧٤٤

[illegible]

٧٤٥

[illegible]

٧٤٦

[illegible]

٧٤٧

[illegible]

٧٤٨

[illegible]

٧٤٩

[illegible]

٧٥٠

[illegible]

٧٥١

[illegible]

٧٥٢

[illegible]

٧٥٣

[illegible]

٧٥٤

[illegible]

٧٥٥

[illegible]

٧٥٦

[illegible]

٧٥٧

[illegible]

٧٥٨

[illegible]

٧٥٩

[illegible]

٧٦٠

[illegible]

٧٦١

[illegible]

٧٦٢

[illegible]

٧٦٣

[illegible]

٧٦٤

[illegible]

٧٦٥

[illegible]

٧٦٦

[illegible]

٧٦٧

[illegible]

٧٦٨

[illegible]

٧٦٩

[illegible]

٧٧٠

[illegible]

٧٧١

[illegible]

٧٧٢

[illegible]

٧٧٣

[illegible]

٧٧٤

[illegible]

٧٧٥

[illegible]

٧٧٦

[illegible]

٧٧٧

[illegible]

٧٧٨

[illegible]

٧٧٩

[illegible]

٧٨٠

[illegible]

٧٨١

[illegible]

٧٨٢

[illegible]

٧٨٣

[illegible]

٧٨٤

[illegible]

٧٨٥

[illegible]

٧٨٦

[illegible]

٧٨٧

[illegible]

٧٨٨

[illegible]

٧٨٩

[illegible]

٧٩٠

[illegible]

٧٩١

[illegible]

٧٩٢

[illegible]

٧٩٣

[illegible]

٧٩٤

[illegible]

٧٩٥

[illegible]

٧٩٦

[illegible]

٧٩٧

[illegible]

٧٩٨

[illegible]

٧٩٩

[illegible]

٨٠٠

[illegible]

٨٠١

[illegible]

٨٠٢

[illegible]

٨٠٣

[illegible]

٨٠٤

[illegible]

٨٠٥

[illegible]

٨٠٦

[illegible]

٨٠٧

[illegible]

٨٠٨

[illegible]

٨٠٩

[illegible]

٨١٠

[illegible]

٨١١

[illegible]

٨١٢

[illegible]

٨١٣

[illegible]

٨١٤

[illegible]

٨١٥

[illegible]

٨١٦

[illegible]

٨١٧

[illegible]

٨١٨

[illegible]

٨١٩

[illegible]

٨٢٠

[illegible]

٨٢١

[illegible]

٨٢٢

[illegible]

٨٢٣

[illegible]

٨٢٤

[illegible]

٨٢٥

[illegible]

٨٢٦

[illegible]

٨٢٧

[illegible]

٨٢٨

[illegible]

٨٢٩

[illegible]

٨٣٠

[illegible]

٨٣١

[illegible]

٨٣٢

[illegible]

٨٣٣

[illegible]

٨٣٤

[illegible]

٨٣٥

[illegible]

٨٣٦

[illegible]

٨٣٧

[illegible]

٨٣٨

[illegible]

٨٣٩

[illegible]

٨٤٠

[illegible]

٨٤١

[illegible]

٨٤٢

[illegible]

٨٤٣

[illegible]

٨٤٤

[illegible]

٨٤٥

[illegible]

٨٤٦

[illegible]

٨٤٧

[illegible]

٨٤٨

[illegible]

٨٤٩

[illegible]

٨٥٠

[illegible]

٨٥١

[illegible]

٨٥٢

[illegible]

٨٥٣

[illegible]

٨٥٤

[illegible]

٨٥٥

[illegible]

٨٥٦

[illegible]

٨٥٧

[illegible]

٨٥٨

[illegible]

٨٥٩

[illegible]

٨٦٠

[illegible]

٨٦١

[illegible]

٨٦٢

[illegible]

٨٦٣

[illegible]

٨٦٤

[illegible]

٨٦٥

[illegible]

٨٦٦

[illegible]

٨٦٧

[illegible]

٨٦٨

[illegible]

٨٦٩

[illegible]

٨٧٠

[illegible]

٨٧١

[illegible]

٨٧٢

[illegible]

٨٧٣

[illegible]

٨٧٤

[illegible]

٨٧٥

[illegible]

٨٧٦

[illegible]

٨٧٧

[illegible]

٨٧٨

[illegible]

٨٧٩

[illegible]

٨٨٠

[illegible]

٨٨١

[illegible]

٨٨٢

[illegible]

٨٨٣

[illegible]

٨٨٤

[illegible]

٨٨٥

[illegible]

٨٨٦

[illegible]

٨٨٧

[illegible]

٨٨٨

[illegible]

٨٨٩

[illegible]

٨٩٠

[illegible]

٨٩١

[illegible]

٨٩٢

[illegible]

٨٩٣

[illegible]

٨٩٤

[illegible]

٨٩٥

[illegible]

٨٩٦

[illegible]

٨٩٧

[illegible]

٨٩٨

[illegible]

٨٩٩

[illegible]

٩٠٠

[illegible]

٩٠١

[illegible]

٩٠٢

[illegible]

٩٠٣

[illegible]

٩٠٤

[illegible]

٩٠٥

[illegible]

٩٠٦

[illegible]

٩٠٧

[illegible]

٩٠٨

[illegible]

٩٠٩

[illegible]

٩١٠

[illegible]

٩١١

[illegible]

٩١٢

[illegible]

٩١٣

[illegible]

٩١٤

[illegible]

٩١٥

[illegible]

٩١٦

[illegible]

٩١٧

[illegible]

٩١٨

[illegible]

٩١٩

[illegible]

٩٢٠

[illegible]

٩٢١

[illegible]

٩٢٢

[illegible]

٩٢٣

[illegible]

٩٢٤

[illegible]

٩٢٥

[illegible]

٩٢٦

[illegible]

٩٢٧

[illegible]

٩٢٨

[illegible]

٩٢٩

[illegible]

٩٣٠

[illegible]

٩٣١

[illegible]

٩٣٢

[illegible]

٩٣٣

[illegible]

٩٣٤

[illegible]

٩٣٥

[illegible]

٩٣٦

[illegible]

٩٣٧

[illegible]

٩٣٨

[illegible]

٩٣٩

[illegible]

٩٤٠

[illegible]

٩٤١

[illegible]

٩٤٢

[illegible]

٩٤٣

[illegible]

٩٤٤

[illegible]

٩٤٥

[illegible]

٩٤٦

[illegible]

٩٤٧

[illegible]

٩٤٨

[illegible]

٩٤٩

[illegible]

٩٥٠

[illegible]

٩٥١

[illegible]

٩٥٢

[illegible]

٩٥٣

[illegible]

٩٥٤

[illegible]

٩٥٥

[illegible]

٩٥٦

[illegible]

٩٥٧

[illegible]

٩٥٨

[illegible]

٩٥٩

[illegible]

٩٦٠

[illegible]

٩٦١

[illegible]

٩٦٢

[illegible]

٩٦٣

[illegible]

٩٦٤

[illegible]

٩٦٥

[illegible]

٩٦٦

[illegible]

٩٦٧

[illegible]

٩٦٨

[illegible]

٩٦٩

[illegible]

٩٧٠

[illegible]

٩٧١

[illegible]

٩٧٢

[illegible]

٩٧٣

[illegible]

٩٧٤

[illegible]

٩٧٥

[illegible]

٩٧٦

[illegible]

٩٧٧

[illegible]

٩٧٨

[illegible]

٩٧٩

[illegible]

٩٨٠

[illegible]

٩٨١

[illegible]

٩٨٢

[illegible]

٩٨٣

[illegible]

٩٨٤

[illegible]

٩٨٥

[illegible]

٩٨٦

[illegible]

٩٨٧

[illegible]

٩٨٨

[illegible]

٩٨٩

[illegible]

٩٩٠

[illegible]

٩٩١

[illegible]

٩٩٢

[illegible]

٩٩٣

[illegible]

٩٩٤

[illegible]

٩٩٥

[illegible]

٩٩٦

[illegible]

٩٩٧

[illegible]

٩٩٨

[illegible]

٩٩٩

[illegible]

١٠٠٠

[illegible]

٤٦

نفرض أن المسافة بين قمة السلم والأرض = ص ، المسافة بين طرفه السفلى والحائط = س

∴ س^{٢} + ص^{٢} = (٢.٦)^{٢}

بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن

٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

، ∵ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٤ متر/د

، عند س = ١

∴ ص = $\sqrt{(٢.٦)^{٢} - ١^{٢}}$ = ٢.٤ متر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-١}{٢.٤} \times ٤ = \frac{-٥}{٣}$ متر/د

، ∵ جا θ = $\frac{\text{ص}}{٢.٦}$ ∴ ص = ٢.٦ جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٢.٦ جتا θ $\frac{\text{ءθ}}{\text{ءن}}$

∴ $\frac{-٥}{٣} = ٢.٦ \times \frac{١}{٢.٦} \times \frac{\text{ءθ}}{\text{ءن}}$

∴ $\frac{\text{ءθ}}{\text{ءن}} = \left(\frac{-٥}{٣}\right)$ ء/د

٤٧

∵ س^{٢} + ص^{٢} = (٥ + ٦)^{٢}

∴ ٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠ (١)

، عندما $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٠.٣ م/د

، س = ٢.٥ م

∴ ص = ٦ م

ومن (١) ٢ × ٢.٥ × ٠.٣ + ٢ × ٦ × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = −$\frac{١}{٨}$ م/د

∴ معدل انخفاض الطرف العلوى للسلم = $\frac{١}{٨}$ م/د

وعندما يتحرك الطرف العلوى والسفلى بنفس المعدل

أى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-\text{ءس}}{\text{ءن}}$

∴ ٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ − ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠

∴ س = ص ، أى س = ص

أى ص^{٢} + ص^{٢} = (٥ + ٦)^{٢}

∴ ٢ ص^{٢} = (٥ + ٦)^{٢}

∴ ص = $\frac{١٣\sqrt{٢}}{٢}$

أى بعد الطرف العلوى للسلم عن الأرضى = $\frac{١٣\sqrt{٢}}{٢}$ م

٤٨

نفرض طول السلم = ل وحدة

س^{٢} + ص^{٢} = ل^{٢}

٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{-\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

عندما ظا θ = $\frac{٥}{٤}$

س = ل جا θ ، ص = ل جتا θ

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{-٥}{٤} \times -\text{ك}$

= $\frac{١٢\text{ك}}{٤}$ وحدة/ث (ك > ٠)

٤٩

س^{٢} + ص^{٢} = ٤^{٢}

٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

عند θ = $\frac{\pi}{٣}$

فإن س = ٢٠٠ سم ، ص = ٢٠٠ $\sqrt{٣}$ سم

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-٢٠٠}{٢٠٠\sqrt{٣}} \times ٢٠ = \frac{-٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم/ث

∴ معدل هبوط الطرف العلوى للسطح = $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم/ث

٤٥

(١) (−) (٢) (−) (٣) (−) (٤) (−)

(٥) (−) (٦) (−) (٧) (١) (٨) (١)

(٩) (−) (١٠) (−) (١١) (−) (١٢) (١)

(١٣) (−) (١٤) (−) (١٥) (−) (١٦) (−)

(١٧) (−) (١٨) (−) (١٩) (−) (٢٠) (−)

(٢١) (١) (٢٢) (−)

٤٦

∵ الطول يتناقص بمعدل ١ سم/د

∴ بعد ن ثانية يصبح الطول = ١٢ − ١ × ن = ١٢ − ن

، ∵ العرض يتزايد بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/د

∴ بعد ثانية يصبح العرض = ٥ + $\frac{١}{٢}$ ن

∴ المساحة (م) = (١٢ − ن) (٥ + $\frac{١}{٢}$ ن)

وعندما يكون الشكل مربعًا

∴ ١٢ − ن = ٥ + $\frac{١}{٢}$ ن ∴ ١$\frac{١}{٢}$ ن = ٧

∴ ن = $\frac{١٤}{٣}$ ث

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = $\frac{١}{٢}$ (١٢ − ن) − (٥ + $\frac{١}{٢}$ ن)

∴ ٦ − $\frac{١}{٢}$ ن − ٥ − $\frac{١}{٢}$ ن = ٠ ∴ ن = ١ ث

وعندما م = (١٢ − ١) × (٥ + $\frac{١}{٢}$) = ٥٠.٥ = ٦٠ سم^{٢}

٤٧

نفرض أن العرض = س ∴ الطول = $\frac{٢٤}{\text{س}}$

∴ ① محيط المستطيل (ح) = ٢ (س + $\frac{٢٤}{\text{س}}$)

= ٢ س + $\frac{٤٨}{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ٢ × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ − $\frac{٤٨}{\text{س}^{٢}}$ × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}\right)_{\text{س}=١}$ = ٢ × ١ − $\frac{٤٨}{١٦}$ × ١

= −١ سم/ث

(٢) عندما $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ٠

∴ ٢ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ − $\frac{٤٨}{\text{س}^{٢}}$ × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٠

∴ ٢ = $\frac{٤٨}{\text{س}^{٢}}$ ∴ س^{٢} = ٢٤

∴ س = ٢ $\sqrt{٦}$ سم ومنها ص = ٢ $\sqrt{٦}$ سم

٤٨

$\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$ = ٦ سم/د

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ٢ سم/د

م = ل ع = ١٢٠٠ (١)

صفر = ل $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ + ع $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$

∴ ل × −٢ + ع × ٦ = ٠ ∴ ل = ٣ ع

بالتعويض فى (١)

(٣ ع) × ع = ١٢٠٠ منها ٣ ع^{٢} = ١٢٠٠

ع = ٢٠ سم ∴ ل = ٦٠ سم

ق^{٢} = ل^{٢} + ع^{٢}

٢ ق $\frac{\text{ءق}}{\text{ءن}}$ = ٢ ل $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$ + ٢ ع $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

ق $\frac{\text{ءق}}{\text{ءن}}$ = ل $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$ + ع $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

$\sqrt{٢٠^{٢} + ٦٠^{٢}}$ × $\frac{\text{ءق}}{\text{ءن}}$ = ٦٠ × ٦ + ٢٠ × −٢

$\frac{\text{ءق}}{\text{ءن}}$ = $\frac{٨\sqrt{١٠}}{٥}$ سم/د

∴ القطر يتزايد بمعدل $\frac{٨\sqrt{١٠}}{٥}$ سم/د

٤٩

نفرض أن الارتفاع = ع ، طول قاعدة المثلث = ٣ ع

∴ المساحة (م) = $\frac{١}{٢}$ × ٣ ع × ع = $\frac{٣}{٢}$ ع^{٢}

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٣ ع $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ وعندما ع = ٩ سم

∴ ٠.٢٧ = ٣ × ٩ × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ٠.١ سم/ث

نفرض أن أبعاد متوازي المستطيلات عند أي لحظة هي

(٦ + ن) ، (٦ + ن) ، (٢٤ − ٢ن)

∴ الحجم (ح) = (٦ + ن)² (٢٤ − ٢ن)

$\frac{دح}{دن}$ = ٢ (٦ + ن) (٢٤ − ٢ن) + (٦ + ن)² (−٢)

= ٢ (٦ + ن) [٢٤ − ٢ن − (٦ + ن)]

= ٢ (٦ + ن) (١٨ − ٣ن)

وعندما $\frac{دح}{دن}$ = صفر

١٨ − ٣ن = ٠ ∴ ن = ٦ سم

نفرض أن طول ضلع القاعدة = ارتفاع الهرم = س

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ س² × س سم³

∴ $\frac{دح}{دس}$ = س² + ٢س

∴ ٠ = س² + ٢س

س² = ١٠٠ ∴ س = ١٠ سم

∴ طول ضلع قاعدة الهرم = ١٠ سم

نفرض أبعاد المنشور هي س ، س ، ص

الحجم (ح) = س² × ص

$\frac{دح}{دس}$ = ٢س × ص + س² × $\frac{دص}{دس}$

∴ $\frac{دح}{دس}$ = ٢س × ص + س² × $\frac{دص}{دس}$

∴ $\frac{دح}{دس}$ = ٠ ، س = ٠ ، ٢ص + س × $\frac{دص}{دس}$ = ٠

∴ $\frac{دص}{دس}$ = −$\frac{٢ص}{س}$

نفرض أن أبعاد المنشور عند أي لحظة هي

(٤ + ٢ن) ، (٤ + ٢ن) ، (٨ − ن)

∴ الحجم (ح) = (٤ + ٢ن)² (٨ − ن)

∴ $\frac{دح}{دن}$ = ٢ (٤ + ٢ن) (٢) (٨ − ن) + (٤ + ٢ن)² (−١)

= (٤ + ٢ن) [٣٢ − ٢ن − (٤ + ٢ن)]

= (٤ + ٢ن) (٢٨ − ٤ن)

= ٤ (٤ + ٢ن) (٧ − ن)

وعندما $\frac{دح}{دن}$ = صفر ∴ ن = ٧ ، ن = −٢

مساحة الدائرة (م) = π نق²

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٢ π نق $\frac{دنق}{دن}$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٢ π نق (−٢) ثابت وليكن ك

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ك

∴ $\frac{دنق}{دن}$ = −٢ π

∴ محيط الدائرة (ح) = ٢ π نق

∴ $\frac{دح}{دن}$ = ٢ π $\frac{دنق}{دن}$ = ٢ π × (−٢)

= −٤ π

∴ $\frac{دح}{دن}$ = −٤ π

أي أن محيط الدائرة يتناقص بمعدل ٤ π

الحجم يتغير بمعدل س $\frac{دس}{دن}$

∴ حجم الكرة (ح) = $\frac{٤}{٣}$ π نق³

∴ $\frac{دح}{دن}$ = $\frac{٤}{٣}$ π × ٣ نق² $\frac{دنق}{دن}$

∴ س × $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{٤}{٣}$ π × ٣ نق² $\frac{دنق}{دن}$ ∴ $\frac{دنق}{دن}$ = $\frac{س}{٤ π نق²}$

مساحة الكرة (م) = ٤ π نق²

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٨ π نق $\frac{دنق}{دن}$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٨ π نق × $\frac{س}{٤ π نق²}$ = $\frac{٢ س}{نق}$ سم² / ثانية

∴ معدل تغير المساحة = $\frac{٢ س}{نق}$

ميل المماس (م) = $\frac{دص}{دس}$ = ٤ − ٢س

∴ $\frac{دم}{دس}$ = −٢

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٤ − ٢س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٠ ∴ ٤ − ٢س = ٠

٤٨

(١) (أ) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (ب) (٥) (أ)

إرشادات لحل رقم ٤٨

(١) نفرض أن ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ ، ..... ، ل$_{ن}$ هي أطوال أضلاع المضلع ، ع هي محيط المضلع

∴ ع = ل$_{١}$ + ل$_{٢}$ + ... + ل$_{ن}$

∴ $\frac{دع}{دن}$ = $\frac{دل_{١}}{دن}$ + $\frac{دل_{٢}}{دن}$ + ... + $\frac{دل_{ن}}{دن}$

= ٢ + ٢ + ... + ٢

∴ $\frac{دع}{دن}$ = ٢ن

أي أن المحيط يزداد بمعدل (٢ن) سم/ث

(٢) نفرض أن ع$_{١}$ هو حجم الخزان الأصغر وارتفاع الماء به هو ع$_{١}$

، ع$_{٢}$ هو حجم الخزان الأكبر وارتفاع الماء به هو ع$_{٢}$

، ∵ الحجم = π نق^{٢} ع

∴ ع$_{١}$ = π × (٤)^{٢} ع$_{١}$ = ١٦ π ع$_{١}$

∴ $\frac{دع_{١}}{دن}$ = ١٦ π $\frac{دع_{١}}{دن}$

، ع$_{٢}$ = π × (٨)^{٢} ع$_{٢}$ = ٦٤ π ع$_{٢}$

∴ $\frac{دع_{٢}}{دن}$ = ٦٤ π $\frac{دع_{٢}}{دن}$

، ∵ تدفق المياه في الخزانين بنفس المعدل

أي أن $\frac{دع_{١}}{دن}$ = $\frac{دع_{٢}}{دن}$

∴ ١٦ π $\frac{دع_{١}}{دن}$ = ٦٤ π $\frac{دع_{٢}}{دن}$

∴ $\frac{دع_{٢}}{دن}$ = $\frac{١}{٤}$ م/دقيقة

(٣) ∵ حجم الاسطوانة (ع) = π نق^{٢} ع

، ∵ نق ثابته

∴ $\frac{دع}{دن}$ = π نق^{٢} $\frac{دع}{دن}$ ، ∴ $\frac{دع}{دن}$ = ثابت

∴ $\frac{دع}{دن}$ = ثابت ∴ ع = ع ، ثابت = ب

، ∵ ع (الارتفاع عند البدء) = صفر

∴ ع = ثابت = ب

∴ العلاقة خطية بين ع ، ن ويمر بنقطة الأصل

∴ الشكل الصحيح هو (ب)

(٤) نفرض أن ارتفاع الماء = ل متر

، طول نصف قطر سطح الماء = نق

من هندسة الشكل نجد أن

نق^{٢} + (٢ − ل)^{٢} = ١ (١)

بعد ٢ دقيقة من بداية صب الماء يكون

ل = $\frac{١}{٢}$ × ٢ = $\frac{١}{٢}$ متر

، نق^{٢} + (٠,٥)^{٢} = ١

∴ نق = $\frac{\sqrt{٧}}{٢}$ متر

وباشتقاق المعادلة (١) بالنسبة للزمن

∴ ٢ نق $\frac{دنق}{دن}$ − ٢ (٢ − ل) $\frac{دل}{دن}$ = صفر

∴ ٢ × $\frac{\sqrt{٧}}{٢}$ × $\frac{دنق}{دن}$ − ٢ × $\left(\frac{١}{٢} - ٢\right)$ × $\frac{١}{٢}$ = صفر

∴ $\frac{دنق}{دن}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٧}}$

، ∵ مساحة سطح الماء (س) = π نق^{٢}

∴ $\frac{دس}{دن}$ = ٢ π نق × $\frac{دنق}{دن}$

= ٢ π × $\frac{\sqrt{٧}}{٢}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٧}}$ = ٢ π

∴ $\frac{دس}{دن}$ = ٢ π سم^{٢}/ث

٤٩

حجم المخروط (ع) = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

، ومن هندسة الشكل

$\frac{نق}{٨٠}$ = $\frac{ع}{١٦}$

∴ نق = $\frac{١}{٢}$ ع

∴ الحجم (ع) = $\frac{١}{٣}$ π $\left(\frac{١}{٢}\right)$^{٢} ع

∴ ع = $\frac{π}{١٢}$ ع^{٣} ∴ $\frac{دع}{دن}$ = $\frac{π}{٤}$ ع^{٢} $\frac{دع}{دن}$

، حجم الماء في الاسطوانة = π نق^{٢} ع$_{١}$ = π (٥٠)^{٢} ع$_{١}$

∴ $\frac{دع_{١}}{دن}$ = ٢٥٠٠ π $\frac{دع_{١}}{دن}$

، ∵ القيمة العددية لـ $\frac{دع}{دن}$ للمخروط = القيمة العددية لـ $\frac{دع_{١}}{دن}$ للاسطوانة وكذلك $\frac{دع}{دن}$ ، $\frac{دع_{١}}{دن}$

∴ $\frac{π}{١٢}$ ع^{٢} $\frac{دع}{دن}$ = ٢٥٠٠ π $\frac{دع_{١}}{دن}$

∴ ع = ١٠٠ سم

٤٤

أبعاد متوازي المستطيلات عند أي لحظة

هي ٢ + ٢ن ، ٤ + ن ، ١٢ − ٣ن

∴ حجم متوازي المستطيلات في أي لحظة

ع = (٢ + ٢ن) (٤ + ن) (١٢ − ٣ن)

= ١٤٤ + ٩٦ن − ٩ن^{٢} − ٦ن^{٣}

∴ $\frac{دع}{دن}$ = ٩٦ − ١٨ن − ١٨ن^{٢}

$\left(\frac{دع}{دن}\right)_{ن=٢}$ = −١٢ سم^{٣}/ث

إذا كان قطر متوازي المستطيلات = ل

∴ ل^{٢} = (٢ + ٢ن)^{٢} + (٤ + ن)^{٢} + (١٢ − ٣ن)^{٢}

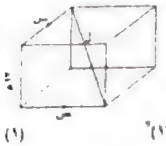
٢ ل $\frac{دل}{دن}$ = ٢ (٢ + ٢ن) × ٢ + ٢ (٤ + ن)

+ ٢ (١٢ − ٣ن) × −٣

$\left(\frac{دل}{دن}\right)_{ن=٢}$ = $\frac{٢ \times ٢ + ٦ \times ١٠ + ٣٦ \times -٣}{١١}$

= $\frac{٢}{١١}$ سم/ث

٤٥



$\frac{دس}{دن}$ = ٢ م/ث

$\frac{دص}{دن}$ = ٦ م/ث

ومن هندسة الشكل

ل^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} + (١٢)^{٢} (١)

∵ ٢ ل $\frac{دل}{دن}$ = ٢ س $\frac{دس}{دن}$ + ٢ ص $\frac{دص}{دن}$

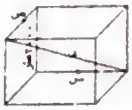
بعد ٦ دقائق س = ٣ × ٦ = ١٨ م

، ص = ٦ × ٦ = ٣٦ م ومن (١) ∴ ل = ٤٢ م

∴ ٢ × ٤٢ × $\frac{دل}{دن}$ = ٢ × ١٨ × ٢ + ٢ × ٣٦ × ٦

∴ $\frac{دل}{دن}$ = $\frac{٤٥}{٧}$ م/ث

٤٦



$\frac{دص}{دن}$ = ١٥٠ م/ث

$\frac{دس}{دن}$ = ٧٥ م/ث

من هندسة الشكل

ف^{٢} = (٢٠٠٠)^{٢} + س^{٢} + ص^{٢} (١)

∴ ٢ ف $\frac{دف}{دن}$ = ٢ س $\frac{دس}{دن}$ + ٢ ص $\frac{دص}{دن}$

بعد ٤٠ ث

ص = ٤٠ × ١٥٠ = ٦٠٠٠ م

س = ٤٠ × ٧٥ = ٣٠٠٠ م

ومن (١) ف = ٧٠٠٠ م

∴ ٢ × ٧٠٠٠ × $\frac{دف}{دن}$ = ٢ × ٣٠٠٠ × ٧٥

+ ٢ × ٦٠٠٠ × ١٥٠

∴ $\frac{دف}{دن}$ = $\frac{٥}{٧}$ ١٦٠ م/ث

اختبارات مراجعة

الوحدة 2

تفاضل وتكامل

الدوال اللوغاريتمية والأسية

(١١) ص = ٢ هـ^{س} + ٥ لو_{هـ} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ هـ^{س} + ٥ × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ لو_{هـ} هـ

= ٢ هـ^{س} + $\frac{\text{٥}}{\text{س}}$ لو_{هـ} هـ

(١٢) ص = لو_{هـ} س^{٢} هـ^{س}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{هـ}^{\text{س}}}$ × (٢ س هـ^{س} + س^{٢} هـ^{س})

= $\frac{\text{٢ س هـ}^{\text{س}} + \text{س}^{\text{٢}}\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{هـ}^{\text{س}}}$

= $\frac{\text{٢}}{\text{س}}$ + هـ^{س}

(١٣) ص = لو_{هـ} س^{٢} هـ^{س}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ × هـ^{س} + $\frac{\text{١}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$ × هـ^{س}

= $\frac{\text{٢}}{\text{س}}$ + هـ^{س}

(١٤) ص = لو (٢ س − ٣)^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{١ (٢ س − ٣) × ٢}}{\text{(٢ س − ٣)}^{\text{٢}}}$ لو هـ

= $\frac{\text{٤ لو هـ}}{\text{(٢ س − ٣)}}$

(١٥) ص = ٢ جا س هـ^{س} لو_{هـ} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ جا س هـ^{س} × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

(١٦) ص = ٢^{س} + ٢ لو_{هـ} س + ٢٠١١

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢^{س} لو_{هـ} ٢ + $\frac{\text{٢}}{\text{س}}$

(١٧) ص = لو_{هـ} $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س + ٧}}$ = لو_{هـ} س^{٢} − لو_{هـ} (س + ٧)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ − $\frac{\text{١}}{\text{س + ٧}}$ = $\frac{\text{٢}}{\text{س}}$ − $\frac{\text{١}}{\text{س + ٧}}$

(١٨) ص = لو (هـ^{س} / س^{٢}) = لو هـ^{س} − لو س^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{١}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$ لو هـ − $\frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ لو هـ

= (١ − $\frac{\text{٢}}{\text{س}}$) لو هـ

٦

(١) ص = س لو_{هـ} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = لو_{هـ} س + س × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ = لو_{هـ} س + ١

(٢) ص = س^{٢} لو_{هـ} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س لو_{هـ} س + س^{٢} × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

= ٢ س لو_{هـ} س + س

= س (٢ لو_{هـ} س + ١)

(٣) ص = س لو_{هـ} س^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = لو_{هـ} س^{٢} + س × $\frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

= لو_{هـ} س^{٢} + ٢

(٤) ص = (٢ س^{٢} + ٣) لو_{هـ} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ س لو_{هـ} س + (٢ س^{٢} + ٣) × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

= ٤ س لو_{هـ} س + $\frac{\text{٢ س}^{\text{٢}} + \text{٣}}{\text{س}}$

(٥) ص = (٢ + س) لو_{هـ} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = لو_{هـ} س + (٢ + س) × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

= لو_{هـ} س + $\frac{\text{٢}}{\text{س}}$ + ١

(٦) ص = ٢ س^{٢} لو_{هـ} س^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ س لو_{هـ} س^{٢} + ٢ س^{٢} × $\frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

= ٤ س لو_{هـ} س^{٢} + ٤ س

(٧) ص = ٢ س + هـ^{س} لو_{هـ} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ + هـ^{س} لو_{هـ} س + هـ^{س} × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

= ٢ + هـ^{س} لو_{هـ} س + $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}$

= ٢ + هـ^{س} (لو_{هـ} س + $\frac{\text{١}}{\text{س}}$)

(٨) ص = هـ^{س} لو_{هـ} (س^{٢} + ١)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = هـ^{س} لو_{هـ} (س^{٢} + ١) + هـ^{س} × $\frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}$

= هـ^{س} (لو_{هـ} (س^{٢} + ١) + $\frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}$)

(٩) ص = ٥ + ٤ جا س لو_{هـ} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٤ جا س لو_{هـ} س + ٤ جتا س × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

= −٤ جا س لو_{هـ} س + $\frac{\text{٤ جتا س}}{\text{س}}$

(١٠) ص = (لو س)^{٢} + $\sqrt{\text{س}}$ لو س^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ (لو س)^{١} × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ لو_{هـ} هـ

+ $\frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}$ لو س^{٢} + $\sqrt{\text{س}}$ × $\frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ لو_{هـ} هـ

= $\frac{\text{٢}}{\text{س}}$ (لو س)^{١} لو_{هـ} هـ

+ $\frac{\text{لو س}^{\text{٢}}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}$ + $\frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{س}}}$ لو_{هـ} هـ

(١١) ص = $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{لو س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{لو س (١) − س × } \frac{\text{١}}{\text{س}}}{\text{(لو س)}^{\text{٢}}}$

= $\frac{\text{لو س − ١}}{\text{(لو س)}^{\text{٢}}}$

(١٢) ص = $\frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{٥ س})}{\text{س + ١}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(س + ١) } \frac{\text{٥}}{\text{٥ س}} \text{ − لو}_{\text{هـ}} \text{ ٥ س (١)}}{\text{(س + ١)}^{\text{٢}}}$

= $\frac{\text{س + ١ − س لو}_{\text{هـ}} \text{ ٥ س}}{\text{س (س + ١)}^{\text{٢}}}$

(١٣) ص = $\frac{\text{لو س}}{\text{جا س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{جا س × } \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ − لو س جا س}}{\text{(جا س)}^{\text{٢}}}$

= $\frac{\text{جا س − س لو س جا س}}{\text{س جا}^{\text{٢}}\text{ س}}$

(١٤) ص = $\frac{\text{لو س}}{\text{لو س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{لو س (} \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{) − لو س لا س}}{\text{لا}^{\text{٢}}\text{ س}}$

= $\frac{\text{لو س − س لو س لا}^{\text{٢}}\text{ س}}{\text{س لا}^{\text{٢}}\text{ س}}$

(١٥) ص = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{لو س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{لو س × هـ}^{\text{س}} \text{ − هـ}^{\text{س}} \text{ × } \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ لو هـ}}{\text{(لو س)}^{\text{٢}}}$

= $\frac{\text{هـ}^{\text{س}} \text{ (٢ لو س − } \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ لو هـ)}}{\text{(لو س)}^{\text{٢}}}$

(١٦) ص = $\frac{\text{لو س}}{\text{١ + لو س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(١ + لو س) } \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ − لو س } \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ لو هـ}}{\text{(١ + لو س)}^{\text{٢}}}$

= $\frac{\text{لو هـ}}{\text{س (١ + لو س)}^{\text{٢}}}$

(١٧) ص = $\frac{\text{(لو س) − ١}}{\text{(لو س) + ١}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(لو س + ١) } \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ − (لو س − ١) } \frac{\text{١}}{\text{س}}}{\text{(لو س + ١)}^{\text{٢}}}$

= $\frac{\text{٢}}{\text{س (لو س + ١)}^{\text{٢}}}$

(١٨) ص = $\frac{\text{١ − ٢ لو س}}{\text{لو س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{لو س × } \frac{\text{٢}}{\text{س}} \text{ + (١ − ٢ لو س) × } \frac{\text{١}}{\text{س}}}{\text{(لو س)}^{\text{٢}}}$

= $\frac{\text{لو س + ١ − ٢ لو س}}{\text{س (لو س)}^{\text{٢}}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{س (لو س)}^{\text{٢}}}$

(ب) ص = ٢ ، $\frac{دص}{دس}$ = لو$_{هـ}$ ٢

$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=٠}$ = ٠ ، $\left(\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right)_{س=٠}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ المماس يوازي محور السينات

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٠

∴ س^٢ + ٢ = ٠

∴ س = $\sqrt{-٢}$ (والسؤال مرفوض)

١١

ص = س هـ^{٢س}

∴ $\frac{دص}{دس}$ = هـ^{٢س} + ٢ س هـ^{٢س}

= هـ^{٢س} (١ + ٢ س)

∴ ميل المماس = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=\frac{١}{٢}}$ = هـ^{١}

هـ (١ + ٢ × $\frac{١}{٢}$) = ٢ هـ

معادلة المماس $\frac{ص - \frac{١}{٢}هـ}{س - \frac{١}{٢}}$ = ٢ هـ

ومنها ٤ هـ س − ٢ ص − هـ = ٠

١٢

ص = هـ^{٢س} جا س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ هـ^{٢س} جا س + هـ^{٢س} × جتا س

= هـ^{٢س} (٢ جا س + جتا س)

∴ ميل المماس $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=٠}$ = ٢

∴ عند س = ٠ فإن ص = ١

∴ النقطة هي (٠ ، ١)

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ١}{س - ٠}$ = ٢

∴ ٢ س − ص + ١ = ٠

١٣

ص = ٢ س + ١

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ لو$_{هـ}$ ٢ × ٢^{س}

ميل المماس = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=١}$ = ٤ لو$_{هـ}$ ٢

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص - ٣}{س - ٢}$ = ٤ لو$_{هـ}$ ٢

أي أن ٤ س لو$_{هـ}$ ٢ − ص − ٢ لو$_{هـ}$ ٢ + ١٧ = ٠

١٤

ص = $\frac{هـ^{س}}{س}$ − س هـ^{س}

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{س هـ^{س} - هـ^{س}}{س^٢}$ − هـ^{س} − س هـ^{س}

∴ ميل المماس = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=١}$ = ٠ − هـ^{١} − هـ^{١} = −٢ هـ

معادلة المماس ص = −٢ هـ

١٥

ص = ٢ هـ^{س}

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ هـ^{س}

∴ ميل المماس = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=١}$ = ٢ هـ^{١} = $\frac{٢}{هـ}$

∴ ميل العمودي = $\frac{هـ}{٢}$

∴ عند س = ١ فإن ص = $\frac{٢}{هـ}$

∴ النقطة هي $\left(١ ، \frac{٢}{هـ}\right)$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص - \frac{٢}{هـ}}{س - ١}$ = $\frac{هـ}{٢}$

ومنها هـ^{٢} س + ٢ هـ ص + (هـ^{٢} − ٩) = ٠

١٦

ص = س^{٢} − ١٨ لو$_{هـ}$ س

∴ عند س = ٢ فإن ص = ٨ − ١٨ لو$_{هـ}$ ٢

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س − $\frac{١٨}{س}$

ميل المماس = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=٢}$ = ٤ − ٩ لو$_{هـ}$ ٢

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص - (٨ - ١٨ لو_{هـ} ٢)}{س - ٢}$ = −٥ + ٩ لو$_{هـ}$ ٢

ومنها ٥ س + ص − ٢ لو$_{هـ}$ ٢ − ١٧ = ٠

١٧

ص = لو$_{هـ}$ (٢ − $\sqrt{٢}$ جا س)

∴ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص = ٠

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-\sqrt{٢}\ جتا س}{٢ - \sqrt{٢}\ جا س}$

∴ ميل المماس = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = −١

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص - ٠}{س - \frac{\pi}{٤}}$ = −١

ومنها س + ص − $\frac{\pi}{٤}$ = ٠

١٨

$\frac{دص}{دس}$ = هـ^{س} ، $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = هـ^{س} + ٢ هـ^{س}

عند س = ١ تكون هـ = ٠ ، ص = ٢

$\frac{دص}{دس}$ = (هـ^{س} + ٢ هـ^{٢س}) + هـ^{س}

= ١ + ٢ هـ^{س}

$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=١}$ = ١ + ٢ هـ^{١} = ٣

ميل المماس = ٣

∴ ميل العمودي = $\frac{-١}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص - ٢}{س - ١}$ = $\frac{-١}{٣}$

∴ س + ٣ ص − ٧ = ٠

ميل المماس = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=٠}$ = ٢

معادلة المماس هي $\frac{ص - ١١}{س - ٠}$ = ٢

∴ ٢ س − ص + ١١ = ٠

معادلة العمودي هي $\frac{ص - ١١}{س - ٠}$ = $\frac{-١}{٢}$

∴ س + ٢ ص − ٢٢ = ٠

١٩

ص = س + س^{٢}

عند س = ١ ، ص = ٢

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ١ + ٢ س

$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=١}$ = ١ + ٢ = ٣

ميل العمودي = $\frac{-١}{٣}$ عند النقطة (١ ، ٢)

معادلة العمودي هي $\frac{ص - ٢}{س - ١}$ = $\frac{-١}{٣}$

س + ٣ ص − ٧ = ٠

٢٠

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (ب)

(٥) (ب) (٦) (ب) (٧) (ب) (٨) (ب)

(٩) (ب) (١٠) (ب) (١١) (ب) (١٢) (ب)

(١٣) (ب) (١٤) (ب) (١٥) (ب) (١٦) (ب)

(١٧) (ب) (١٨) (ب) (١٩) (ب) (٢٠) (ب)

(٢١) (ب) (٢٢) (ب) (٢٣) (ب) (٢٤) (ب)

٢١

نفرض ص = $\frac{هـ^{س}}{س}$

= $\frac{١}{س}$ + $\frac{س}{١!}$ + $\frac{س^٢}{٢!}$ + $\frac{س^٣}{٣!}$ + ...

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٠ + ١ + $\frac{س}{١!}$ + $\frac{س^٢}{٢!}$ + $\frac{س^٣}{٣!}$ + ...

= ص

∴ $\frac{د}{دس}$ (هـ^{س}) = هـ^{س}

٢٢

ص = س^{٢} لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٢}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٢}$ + س^{٢} × $\frac{٢}{س}$ × $\frac{١}{٢}$

= ٢ س لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٢}$ + س

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٢ لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٢}$ + ٢ س × $\frac{١}{س}$ + ١

= ٢ لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٢}$ + ٣

(١٠) ص = هـ^س^٢ بأخذ لوغاريتم الطرفين الأساس هـ

لو هـ ص = س^٢ لو هـ هـ = س^٢

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

ص' / ص = هـ س^٢

ص' = هـ س^٢ × هـ س^٢

ص' = هـ^س^٢ × هـ^س^٢

(١١) ص = هـ^س^٣ بأخذ لوغاريتم الطرفين الأساس هـ

لو هـ ص = هـ^س^٣ لو هـ هـ = هـ^س^٣

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

ص' / ص = هـ

ص' = هـ^س^٣ × هـ^س^٣

(١٢) ص = (لو س)^لو س

بأخذ لوغاريتم الطرفين الأساس هـ

∴ لو هـ ص = لو س لو هـ لو س

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ص' / ص = ١ / س لو هـ لو هـ لو س + لو س × ١ / س لو هـ

∴ ص' / ص = س لو هـ / س [لو هـ لو س + ١]

(١٣) ص = (لو س)^ظا س

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

لو هـ ص = ظا س لو هـ لو (لو س)

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

ص' / ص = ظا س × ١ / (لو س × س) + لو هـ لو (لو س) × قا^٢ س

(١٤) ص = (س + ٢)^س^٢ بأخذ لوغاريتم الطرفين

لو هـ ص = س^٢ لو هـ (س + ٢)

ص' / ص = س^٢ لو هـ لو هـ (س + ٢) + لو هـ (س + ٢) × ٢س

ص' = ص (س^٢ لو هـ لو هـ (س + ٢) + لو هـ (س + ٢) × ٢س)

(١٥) ص = (لو س)^س

لو هـ ص = س لو هـ لو س

ص' / ص = لو هـ لو س + س × ١ / س × ١ / لو س × ١ / س لو هـ

∴ ص' = (لو س)^س [لو هـ لو س + ١ / لو س لو هـ]

(١٦) ص = س^س^س

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو هـ ص = س^س^س لو هـ س

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو هـ لو هـ ص = س لو هـ س + لو هـ لو هـ س

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

[illegible]

(١٧) ص = لو هـ ٢ س

∴ ص' = ١ / س

∴ ميل المماس = (ص' / ص)(١، لو هـ ٢) = ١

∵ س = ١ ، ص = لو هـ ٢

∴ نقطة التماس هي (١ ، لو هـ ٢)

معادلة المماس هي ص − لو هـ ٢ = ١ (س − ١)

∴ ص = س − ١ + لو هـ ٢

بالقسمة على لو هـ ٢

∴ ص / لو هـ ٢ = س / لو هـ ٢ − ١ / لو هـ ٢

نقطة تقاطع المماس مع المحاور هي

(١ / لو هـ ٢ ، ٠) ، (٠ ، −١ / لو هـ ٢)

طول أ ب = √((١ / لو هـ ٢)^٢ + (−١ / لو هـ ٢)^٢)

= √(٢ / لو هـ ٢) وحدة طول

(١٨) ص = لو هـ ٢ س

∴ ص' = ٢ / س

∴ ميل المماس = (ص' / ص)(١، لو هـ ٢) = ١

∴ ميل العمودي = −١

[illegible]

(١٩)

[illegible]

ميل المماس = (ص' / ص)(١، ١) = ١

∵ س = ١ ، ص = ١

∴ نقطة التماس هي (١ ، ١)

معادلة المماس هي ص − ١ = ١ (س − ١)

∴ ص = س − ١ + ١

∴ ص = س

نقطة تقاطع المماس مع المحاور هي

(٠ ، ٠)

طول أ ب = √((١ − ٠)^٢ + (١ − ٠)^٢)

= √٢ وحدة طول

(٢٠)

[illegible]

∴ ص' = ٢ س

∴ ميل المماس = (ص' / ص)(١، ١) = ٢

∴ ميل العمودي = −١ / ٢

[illegible]

∴ د(س) = قا² س قـ^{قا² س} = قا² س × د(س)

∵ قا² س ≥ ١ لجميع قيم س ∈ ح

∴ د(س) ≥ د(س)

(٤) ∵ ن هي الدالة العكسية للدالة د

∴ ن[د(س)] = س

∴ ن'(د(س)) × د'(س) = ١

بوضع س = صفر

∴ ن'(د(٠)) × د'(٠) = ١

∵ د(٠) = ١ ، د'(س) = ٢ س^٢ + ٢ + لو س

∴ د'(٠) = ٢ ، ن'(١) × د'(٠) = ١

∴ ن'(١) × ٢ = ١ ، ن'(١) = $\frac{١}{٢}$

٥٥

س = قـ^{٢ ن ما ٢ ن} ∴ لو س = ما ٢ ن (١)

، ص = قـ^{٢ ن ما ٢ ن} ∴ لو ص = ما ٢ ن (٢)

باشتقاق المعادلة (١) بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{١}{س} \times \frac{دس}{دن}$ = − ٢ ما ٢ ن = − ٢ لو ص (٣)

، باشتقاق المعادلة (٢) بالنسبة إلى ن

$\frac{١}{ص} \times \frac{دص}{دن}$ = ٢ ما ٢ ن = ٢ لو س (٤)

بقسمة (٤) على (٣)

∴ $\frac{\frac{١}{ص} \times \frac{دص}{دن}}{\frac{١}{س} \times \frac{دس}{دن}} = \frac{٢ لو س}{-٢ لو ص}$

∴ $\frac{س}{ص} \times \frac{دص}{دس} = \frac{-لو س}{لو ص}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-ص لو س}{س لو ص}$

٥٦

ص = أ ما (لو س) + ب ما (لو س)

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-أ ما (لو س)}{س} + \frac{ب ما (لو س)}{س}$

(بالضرب × س)

∴ س $\frac{دص}{دس}$ = − أ ما (لو س) + ب ما (لو س)

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ س $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + $\frac{دص}{دس}$

= $\frac{-أ ما (لو س)}{س} - \frac{ب ما (لو س)}{س}$ (بالضرب × س)

∴ س $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + س $\frac{دص}{دس}$

= − (أ ما (لو س) + ب ما (لو س)) = − ص

∴ س $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + س $\frac{دص}{دس}$ + ص = صفر

∵ س = قـ^{ما ٢ ن} ∴ لو س = ما ٢ ن

، ص = قـ^{ما ٢ ن} ∴ لو ص = ما ٢ ن

بالتربيع والجمع

(لو س)^٢ + (لو ص)^٢ = (ما ٢ ن)^٢ + (ما ٢ ن)^٢ = ١

بالتفاضل بالنسبة لـ س

$\frac{٢ لو س}{س} + \frac{٢ لو ص}{ص} \times$ ص' = ٠

∴ ص' = $\frac{-ص لو س}{س لو ص}$

٥٧

∵ ص = س^س

∴ لو ص = س لو س

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{١}{ص}$ × ص' = س × $\frac{١}{س}$ + لو س

∴ $\frac{١}{ص}$ × ص' = ١ + لو س

∴ ص' = ص (١ + لو س)

∴ ص' = س^س (١ + لو س)

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ ص'' = س^س $\left(\frac{١}{س}\right)$ + (١ + لو س)

× س^س × (١ + لو س)

∴ ص'' = س^س × (١ + لو س)^٢ + س^{س − ١}

٥٨

ص = $\frac{١}{٢}$ لو $\left[\frac{١ - ما ٢ س}{١ + ما ٢ س}\right]$ = $\frac{١}{٢}$ لو $\frac{٢ ما^٢ س}{٢ ما^٢ س}$

= $\frac{١}{٢}$ لو قا^٢ س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{قا^٢ س}$ × ٢ قا س × قا^٢ س

= $\frac{ما^٢ س}{ما^٢ س} \times \frac{جا س}{جا س} \times \frac{١}{جا^٢ س}$

= $\frac{١}{جا س جا س}$ = $\frac{١}{\frac{١}{٢} جا ٢ س}$ = ٢ قتا ٢ س

٥٩

ص = لو $\left(\frac{\sqrt{س^٢ + ١} - ١}{\sqrt{س^٢ + ١} + ١}\right)$

= لو $\left(\sqrt{س^٢ + ١} - ١\right)$ − لو $\left(\sqrt{س^٢ + ١} + ١\right)$

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{\frac{٢ س}{٢\sqrt{س^٢ + ١}} - ١}{\sqrt{س^٢ + ١} - ١}$ − $\frac{\frac{٢ س}{٢\sqrt{س^٢ + ١}} + ١}{\sqrt{س^٢ + ١} + ١}$

= $\frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}} \times \left(\frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١} - ١} - \frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١} + ١}\right)$

= $\frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}} \times \left(\frac{\sqrt{س^٢ + ١} + ١ - \sqrt{س^٢ + ١} + ١}{س^٢ + ١ - ١}\right)$

= $\frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}} \times \left(\frac{٢}{س}\right)$ = $\frac{٢}{س\sqrt{س^٢ + ١}}$

٦٠

ص = س^{س^س} بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو ص = س^{س^س} لو س

∴ لو ص = ص لو س

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ص'}{ص}$ = ص' لو س + $\frac{ص}{س}$ (بالضرب × ص س)

∴ س ص' = س ص ص' لو س + ص^٢

∴ س ص' (١ − ص لو س) = ص^٢

∴ س ص' = $\frac{ص^٢}{١ - ص لو س}$

٦١

ص = $\sqrt{لو س + \sqrt{لو س + \sqrt{لو س + ...}}}$

(بتربيع الطرفين)

∴ ص^٢ = لو س + $\sqrt{لو س + \sqrt{لو س + ...}}$

∴ ص^٢ = لو س + ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ص ص' = $\frac{١}{س}$ + ص'

∴ ٢ ص ص' − ص' = $\frac{١}{س}$

∴ (٢ ص − ١) ص' = $\frac{١}{س}$

[illegible]

(٦) $\int \left(\frac{٢}{س} + ٤ هـ^{٢س}\right) ءس$

$= ٢ لو_{هـ} |س| + ٢ هـ^{٢س} + ث$

(٧) $\int \frac{١}{٢س لو_{هـ}٢} ءس = \frac{١}{٢ لو_{هـ}٢} لو_{هـ} |س| + ث$

(٨) $\int \frac{لو_{هـ}٢}{س} ءس = لو_{هـ}٢ \cdot لو_{هـ} |س| + ث$

(٩) $\int \frac{لو_{هـ}٢}{س لو_{هـ}س} ءس = \int \frac{٢ لو_{هـ}س}{٢س لو_{هـ}س} ءس$

$= \int \frac{٢}{٢س} ءس = \frac{٢}{٢} لو_{هـ} |س| + ث$

(١٠) $\int \frac{لو_{هـ}س}{س لو_{هـ}٢س} ءس = \int \frac{لو_{هـ}س}{\frac{١}{٢}س لو_{هـ}س} ءس$

$= \int \frac{٢}{س} ءس = ٢ لو_{هـ} |س| + ث$

(١١) $\int \left(\frac{٢هـ^{س}}{س} + \frac{س}{هـ^{س}}\right) ءس$

$= ٢ هـ^{س} لو_{هـ} |س| + \frac{١}{٢} س^{٢} هـ^{-س} + ث$

(١٢) $\int \left(\frac{٢}{س لو_{هـ}٢} + لو_{هـ}٢\right) ءس$

$= ٢ لو_{هـ} |لو_{هـ}س| + لو_{هـ}٢ \cdot س + ث$

(١٣) بفرض أن د(س) = جاس

د'(س) = جتاس

$\int جا^{٢}س \, ءس = \int (جاس) \cdot جاس \, ءس$

$= \int \frac{جا٢س}{٢} ءس$

$= -\frac{جتا٢س}{٤} + ث$

(١٤) بفرض أن د(س) = جاس

د'(س) = −جتاس

$\int جا^{٣}س \, ءس = \int جا^{٢}س \cdot جاس \, ءس$

$= -\int (١ - جتا^{٢}س) جتاس \, ءس$

$= -\int (جتاس - جتا^{٣}س) ءس$

$= -جاس + \frac{١}{٣} جتا^{٣}س + ث$

(١٥) $\int \left(س^{٢} + ٥ هـ^{س} + \frac{١}{س}\right) ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + ٥ هـ^{س} + لو_{هـ} |س| + ث$

(١٦) $\int \left(جاس - \frac{٢}{س} + هـ^{س}\right) ءس$

$= -جتاس - ٢ لو_{هـ} |س| + هـ^{س} + ث$

(١٧) $\int \left(هـ^{س} + ٢^{س} + \frac{١}{س}\right) ءس$

$= هـ^{س} + \frac{٢^{س}}{لو_{هـ}٢} + لو_{هـ} |س| + ث$

(١٨) $\int \left(\frac{٥س + ٧}{س} + هـ^{س}\right) ءس$

$= \int \left(٥ + \frac{٧}{س} + هـ^{س}\right) ءس$

$= ٥س + ٧ لو_{هـ} |س| + هـ^{س} + ث$

(١٩) $\int \left(\frac{-٢}{س} + ٤ هـ^{-١٠س} + هـ^{١٠}\right) ءس$

$= -٢ لو_{هـ} |س| + \frac{٤ هـ^{-١٠س}}{-١٠} + هـ^{١٠س} + ث$

$= -٢ لو_{هـ} |س| - ١٠ هـ^{-١٠س} + هـ^{١٠س} + ث$

(٢٠) $\int \frac{٦س^{٢} - ٥}{٢س} ءس = \int \left(٣س - \frac{٥}{٢س}\right) ءس$

$= س^{٣} - \frac{٥}{٢} لو_{هـ} |س| + ث$

(٢١) $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٢س} ءس = \int \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س(س - ٢)} ءس$

$\int \frac{س + ٢}{س} ءس = \int \left(١ + \frac{٢}{س}\right) ءس$

$= س + ٢ لو_{هـ} |س| + ث$

(٢٢) $\int \frac{(٢س - ١)^{٢}}{٢س} ءس = \int \frac{٤س^{٢} - ٤س + ١}{٢س} ءس$

$= \int \left(\frac{٢}{٢}س - \frac{٤}{٢} + \frac{١}{٢س}\right) ءس$

$= \frac{٢}{٢}س^{٢} - \frac{٤}{٢}س + \frac{١}{٢} لو_{هـ} |س| + ث$

(٢٤) $\int \left(\frac{٤هـ^{س} + س هـ^{٢س}}{س هـ^{س}}\right) ءس$

$= \int \left(\frac{٤}{س} + هـ^{س}\right) ءس$

$= ٤ لو_{هـ} |س| + هـ^{س} + ث$

٥

(١) $\int \frac{١}{٢س + ١} ءس = ٢ \int \frac{٢}{٢س + ١} ءس$

$= ٢ لو_{هـ} |٢س + ١| + ث$

(٢) $\int \frac{٤س}{٤س - ١} ءس = \frac{١}{٤} \int \frac{٤}{٤س - ١} ءس$

$= \frac{١}{٤} لو_{هـ} |٤س - ١| + ث$

(٣) بفرض أن د(س) = س^٢ + ١

∴ د'(س) = ٢س

$\int \frac{س}{س^{٢} + ١} ءس = \frac{١}{٢} \int \frac{٢س}{س^{٢} + ١} ءس$

$= \frac{١}{٢} لو_{هـ} |س^{٢} + ١| + ث$

(٤) بفرض أن د(س) = س^٢ − ١

∴ د'(س) = ٢س

∴ $\int \frac{٢س}{س^{٢} - ١} ءس = \frac{٢}{٢} \int \frac{٢س}{س^{٢} - ١} ءس$

$= \frac{٢}{٢} لو_{هـ} |س^{٢} - ١| + ث$

(٥) بفرض أن د(س) = س² + ٢س

∴ د′(س) = ٢س + ٢

∫ (٢س + ٢)/(س² + ٢س) ءس = ∫ (٢س + ٢)/(س² + ٢س) ءس

= لو_هـ |س² + ٢س| + ث

(٦) بفرض أن د(س) = س² + ٢س + ٧

∴ د′(س) = ٢س + ٢

∫ (س + ١)/(س² + ٢س + ٧) ءس

= ½ ∫ (٢س + ٢)/(س² + ٢س + ٧) ءس

= ½ لو_هـ |س² + ٢س + ٧| + ث

(٧) بفرض أن د(س) = س² + ٢س + ٢

∴ د′(س) = ٢س + ٢

∫ (س + ١)/(س² + ٢س + ٢) ءس

= ½ لو_هـ |س² + ٢س + ٢| + ث

(٨) بفرض أن د(س) = س² − ١٠س

∴ د′(س) = ٢س − ١٠

∫ (س − ٥)/(س² − ١٠س) ءس

= لو_هـ |س² − ١٠س| + ث

(٩) بفرض أن د(س) = ٢س² + س² − ١

∴ د′(س) = ٦س² + ٢س

∫ (٣س² + س)/(٢س³ + س² − ١) ءس

= ½ ∫ (٦س² + ٢س)/(٢س³ + س² − ١) ءس

= ½ لو_هـ |٢س³ + س² − ١| + ث

(١٠) بفرض أن د(س) = س² + ٦س + ١٠

∴ د′(س) = ٢س + ٦

∫ (س + ٣)/(س² + ٦س + ١٠) ءس

= ½ ∫ (٢س + ٦)/(س² + ٦س + ١٠) ءس

= ½ لو_هـ |س² + ٦س + ١٠| + ث

(١١) ∫ (٢س + ١)/(س² + س) ءس

= ∫ (٢س + ١)/(س² + س) ءس

= ∫ (٢س + ١/س − ١/(س + ١)) ءس

= ٢س + لو_هـ |س| − لو_هـ |س + ١| + ث

(١٢) ∫ (س + ١)/(س² + ٢س) ءس

= ∫ (س + ١)/(س(س + ٢)) ءس

= ∫ ((س + ١)/س × ١/(س + ٢)) ءس

= ∫ ((س + ١)/س × (س + ١)/(س + ٢)) ءس

= ∫ (س − ١ + ١/(س + ٢)) ءس

= ½ س² − س + لو_هـ |س + ٢| + ث

(١٣) بفرض أن د(س) = هـ^س + ٢

∴ د′(س) = هـ^س

∫ هـ^س/(هـ^س + ٢) ءس = لو_هـ |هـ^س + ٢| + ث

(١٤) بالضرب بسطًا ومقامًا في هـ^−س

∴ التكامل = ∫ هـ^−س/(هـ^س + هـ^−س) ءس

وبفرض د(س) = هـ^س − هـ^−س

∴ د′(س) = هـ^س + هـ^−س

التكامل = لو_هـ |هـ^س − هـ^−س| + ث

(١٥) بفرض أن د(س) = جا ٢س

∴ د′(س) = ٢ جتا ٢س

∫ جتا ٢س/جا ٢س ءس = ½ ∫ ٢ جتا ٢س/جا ٢س ءس

= ½ لو_هـ |جا ٢س| + ث

(١٦) ∫ جا ٢س ءس = ∫ جا ٢س جا ٢س/جا ٢س ءس

= ∫ (١ − جتا² ٢س)/جا ٢س ءس

= ∫ (جا ٢س/جا ٢س − جتا ٢س/جا ٢س) ءس

= ∫ (جا ٢س − جتا ٢س × جتا ٢س/جا ٢س) ءس

= ∫ (جا ٢س − جتا ٢س × ١/ظا ٢س) ءس

= ½ لو_هـ |جا ٢س| − ½ ∫ جتا ٢س/ظا ٢س ءس

بفرض أن د(س) = ظا ٢س

∴ د′(س) = ٢ قا² ٢س = ٢ (١ + ظا² ٢س)

∴ ∫ جتا ٢س/ظا ٢س ءس = ½ ∫ ٢ قا² ٢س/ظا ٢س ءس

= ½ لو_هـ |ظا ٢س| + ث

(١٧) ∫ ظا² ٣س ءس = ∫ (قا² ٣س − ١) ءس

= ∫ (قا² ٣س − جتا² ٣س/جتا² ٣س) ءس

∴ د′(س) = ٣ قا² ٣س ظا ٣س − ٣ جتا² ٣س جا ٣س/جتا⁴ ٣س

= ٣ قا² ٣س ظا ٣س − ٣ جا ٣س/جتا³ ٣س

التكامل = ½ ظا² ٣س − ½ لو_هـ |جتا ٣س| + ث

حل آخر

∵ د′(س) = قا² ٣س ظا ٣س

التكامل = ½ ظا² ٣س − ½ لو_هـ |جا ٣س| + ث

(١٨) بفرض أن د(س) = س + لو_هـ جا س

∴ د′(س) = ١ + جتا س/جا س = ١ + ظا س

∫ (١ + ظا س)/(س + لو_هـ جا س) ءس

= لو_هـ |س + لو_هـ جا س| + ث

(١٩) بفرض أن د(س) = س² + ٦س + ١٠

∴ د′(س) = ٢س + ٦

∫ (س + ٣)/(س² + ٦س + ١٠) ءس

= ½ ∫ (٢س + ٦)/(س² + ٦س + ١٠) ءس

= ½ لو_هـ |س² + ٦س + ١٠| + ث

(٢٠) بفرض أن د(س) = س² + ٢س + ٧

∴ د′(س) = ٢س + ٢

∫ (س + ١)/(س² + ٢س + ٧) ءس

= ½ ∫ (٢س + ٢)/(س² + ٢س + ٧) ءس

= ½ لو_هـ |س² + ٢س + ٧| + ث

(٢١) بفرض أن د(س) = س² + ٢س

∴ د′(س) = ٢س + ٢

∫ (س + ١)/(س² + ٢س) ءس

= ½ ∫ (٢س + ٢)/(س² + ٢س) ءس

= ½ لو_هـ |س² + ٢س| + ث

حل آخر

∵ ءءس (قا س ظا س) = قا س ظا² س

التكامل = ½ قا² س − ½ لو_هـ |جا س| + ث

(٢٢) بفرض أن د(س) = س + لو_هـ جا س

∴ د′(س) = ١ + جتا س/جا س = ١ + ظا س

∫ (١ + ظا س)/(س + لو_هـ جا س) ءس

= لو_هـ |س + لو_هـ جا س| + ث

(٢٣) ∫ ظا² س ءس = ∫ قا² س ظا² س ءس

∫ قا² س (قا² س − ١) ءس

∫ (قا² س ظا² س − جتا² س/جتا² س) ءس

∴ ءءس (ظا س) = قا² س ظا² س − جتا² س/جتا² س

التكامل = ½ ظا² س − س + لو_هـ |جا س| + ث

حل آخر

∵ ءءس (قا س ظا س) = قا س ظا² س

التكامل = ½ قا² س − ½ لو_هـ |جا س| + ث

(٢٤) بفرض أن د(س) = قا² س

∴ د′(س) = ٢ قا² س ظا² س

∫ قا² س ظا² س ءس = ½ ∫ ٢ قا² س ظا² س ءس

= ½ لو_هـ |قا² س + ظا² س| + ث

(٢٥) بفرض أن د(س) = س + هـ^س

∴ د′(س) = ١ + هـ^س

∫ (١ + هـ^س)/(س + هـ^س) ءس

= لو_هـ |س + هـ^س| + ث

٧

(١) (جـ)	(٢) (أ)	(٣) (جـ)	(٤) (د)
(٥) (أ)	(٦) (جـ)	(٧) (ب)	(٨) (د)
(٩) (جـ)	(١٠) (د)	(١١) (أ)	(١٢) (جـ)
(١٣) (د)	(١٤) (أ)	(١٥) (ب)	(١٦) (ب)
(١٧) (جـ)	(١٨) (د)	(١٩) (أ)	(٢٠) (أ)
(٢١) (ب)			

٨

ءص/ءس = ٧ − ٢ هـ^س (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

ص = ∫ (٧ − ٢ هـ^س) ءس = ٧ س − ٢ هـ^س + ث

∵ د(لو_هـ ٢) = ٣

∴ ٣ = ٧ لو_هـ ٢ − ٢ هـ^لو_هـ ٢ + ث

∴ ٣ = ٧ لو_هـ ٢ − ٢ × ٢ + ث

∴ ث = ٧ − ٧ لو_هـ ٢ = ٧ (١ − لو_هـ ٢) = ٧ (لو_هـ (هـ/٢))

∴ د(س) = ٧ س − ٢ هـ^س + ٧ لو_هـ (هـ/٢)

٩

(١) ∫ ظا س ءس = ∫ جا س/جتا س ءس

= ∫ (−جا س)/جتا س ءس = −لو_هـ |جتا س| + ث

(٢) ∫ ظا س ءس = ∫ جا س/جتا س ءس

= لو_هـ |جا س| + ث

(٣) ∫ ظا س ءس = ∫ ظا س (ظا س + ظا س)/(ظا س + ظا س) ءس

= ∫ (ظا² س + ظا س ظا س)/(ظا س + ظا س) ءس

= لو_هـ |ظا س + ظا س| + ث

(٤) ∫ ظا س ءس = ∫ ظا س (ظا س − ظا س)/(ظا س − ظا س) ءس

= −∫ (ظا² س − ظا س ظا س)/(ظا س − ظا س) ءس

= −لو_هـ |ظا س − ظا س| + ث

(٥) بفرض أن د(س) = ظا س + ظا س

∴ د′(س) = جتا² س + ظا² س

∫ (جتا² س + ظا² س)/(ظا س + ظا س) ءس

= لو_هـ |ظا س + ظا س| + ث

(٦) بفرض أن د(س) = ظا س − ظا س

∴ د′(س) = جتا² س − ظا² س

∫ (جتا² س − ظا² س)/(ظا س − ظا س) ءس

= لو_هـ |ظا س − ظا س| + ث

حل آخر

∵ التكامل = لو_هـ |ظا س + ظا س| + ث

(٧) بفرض أن د(س) = ظا² س

∴ د′(س) = ٢ ظا س قا² س

∫ ظا² س/ظا س ءس = ½ ∫ ٢ ظا س قا² س/ظا س ءس

= ½ لو_هـ |ظا² س| + ث

(٨) بفرض أن د(س) = ظا² س

∴ د′(س) = ٢ ظا س قا² س

∫ ظا² س/ظا س ءس = ½ ∫ ٢ ظا س قا² س/ظا س ءس

= ½ لو_هـ |ظا² س| + ث

(٩) بفرض أن د(س) = ظا س + ظا س

∴ د′(س) = جتا² س + ظا² س

∫ (جتا² س + ظا² س)/(ظا س + ظا س) ءس

= لو_هـ |ظا س + ظا س| + ث

(١٠) ∫ (ظا س + ظا س)/(ظا س + ظا س) ءس

= ∫ (ظا س/(ظا س + ظا س) + ظا س/(ظا س + ظا س)) ءس

= ∫ جتا س/جتا س ءس

= س + ث

(١١) بفرض أن د(س) = ظا س − ظا س

∴ د′(س) = جتا² س − ظا² س

∫ (جتا² س − ظا² س)/(ظا س − ظا س) ءس

= لو_هـ |ظا س − ظا س| + ث

(١٢) بفرض أن د(س) = ظا² س + ظا² س

∴ د′(س) = ٢ ظا س قا² س + ٢ ظا س قا² س

∫ (ظا² س + ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ ∫ (٢ ظا² س + ٢ ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ لو_هـ |ظا² س + ظا² س| + ث

(١٣) بفرض أن د(س) = ظا² س + ظا² س

∴ د′(س) = ٢ ظا س قا² س + ٢ ظا س قا² س

∫ (ظا² س + ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ ∫ (٢ ظا² س + ٢ ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ لو_هـ |ظا² س + ظا² س| + ث

(١٤) بفرض أن د(س) = ظا² س + ظا² س

∴ د′(س) = ٢ ظا س قا² س + ٢ ظا س قا² س

∫ (ظا² س + ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ ∫ (٢ ظا² س + ٢ ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ لو_هـ |ظا² س + ظا² س| + ث

(١٥) بفرض أن د(س) = ظا² س + ظا² س

∴ د′(س) = ٢ ظا س قا² س + ٢ ظا س قا² س

∫ (ظا² س + ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ ∫ (٢ ظا² س + ٢ ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ لو_هـ |ظا² س + ظا² س| + ث

(١٦) بفرض أن د(س) = ظا² س + ظا² س

∴ د′(س) = ٢ ظا س قا² س + ٢ ظا س قا² س

∫ (ظا² س + ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ ∫ (٢ ظا² س + ٢ ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ لو_هـ |ظا² س + ظا² س| + ث

(١٧) بفرض أن د(س) = ظا² س + ظا² س

∴ د′(س) = ٢ ظا س قا² س + ٢ ظا س قا² س

∫ (ظا² س + ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ ∫ (٢ ظا² س + ٢ ظا² س)/(ظا² س + ظا² س) ءس

= ½ لو_هـ |ظا² س + ظا² س| + ث

(١٨) بفرض أن د(س) = س + هـ^س

∴ د′(س) = ١ + هـ^س

∫ (١ + هـ^س)/(س + هـ^س) ءس

= لو_هـ |س + هـ^س| + ث

(١٩) بفرض أن د(س) = س + هـ^س

∴ د′(س) = ١ + هـ^س

∫ (١ + هـ^س)/(س + هـ^س) ءس

= لو_هـ |س + هـ^س| + ث

(٢٠) بفرض أن د(س) = س + هـ^س

∴ د′(س) = ١ + هـ^س

∫ (١ + هـ^س)/(س + هـ^س) ءس

= لو_هـ |س + هـ^س| + ث

(٢١) بفرض أن د(س) = س + هـ^س

∴ د′(س) = ١ + هـ^س

∫ (١ + هـ^س)/(س + هـ^س) ءس

= لو_هـ |س + هـ^س| + ث

(٢٢) بفرض أن د(س) = س + هـ^س

∴ د′(س) = ١ + هـ^س

∫ (١ + هـ^س)/(س + هـ^س) ءس

= لو_هـ |س + هـ^س| + ث

(٢٣) بفرض أن د(س) = س + هـ^س

∴ د′(س) = ١ + هـ^س

∫ (١ + هـ^س)/(س + هـ^س) ءس

= لو_هـ |س + هـ^س| + ث

(٢٤) بفرض أن د(س) = س + هـ^س

∴ د′(س) = ١ + هـ^س

∫ (١ + هـ^س)/(س + هـ^س) ءس

= لو_هـ |س + هـ^س| + ث

(٢٥) بفرض أن د(س) = س + هـ^س

∴ د′(س) = ١ + هـ^س

∫ (١ + هـ^س)/(س + هـ^س) ءس

= لو_هـ |س + هـ^س| + ث

١٠

ءص/ءس = ١/(٢ س − هـ^س)

ص = ∫ ١/(٢ س − هـ^س) ءس = ½ ∫ ٢/(٢ س − هـ^س) ءس

= ½ لو_هـ |٢ س − هـ^س| + ث

∴ د(س) = ½ لو_هـ |٢ س − هـ^س| + ث

∵ د(هـ) = ½

∴ ½ = ½ لو_هـ |٢ هـ − هـ^هـ| + ث

∴ ½ لو_هـ |٢ هـ − هـ^هـ| = ث ∴ ث = صفر

∴ د(س) = ½ لو_هـ |٢ س − هـ^س|

∴ د(٢ هـ) = ½ لو_هـ |٤ هـ − هـ^٢هـ| = ½ لو_هـ |٢ هـ|

= ½ [لو_هـ هـ + لو_هـ ٢] = ½ (١ + لو_هـ ٢)

١١

ءص/ءس = (٢ س + ٢)/س = ٢ + ٢/س

(بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

ص = ∫ (٢ + ٢/س) ءس = ٢ س + ٢ لو_هـ |س| + ث

∵ (هـ ، ٢ هـ + ٥) تقع على المنحنى

∴ ٢ هـ + ٥ = ٢ هـ + ٢ + ث ∴ ث = ٣

∴ ص = ٢ س + ٢ لو_هـ |س| + ٣

١٢

ءص/ءس = ٢ هـ^−س (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

ص = ∫ ٢ هـ^−س ءس = −٢ هـ^−س + ث

∴ د(٠) = −١ ∴ −١ = −٢ هـ^٠ + ث

∴ ث = ١ ∴ ص = −٢ هـ^−س + ١

∴ د(س) = −٢ هـ^−س + ١

∴ د(٢) = −٢ هـ^−(٢) + ١ = ١ − ٢ هـ^−٢

١٣

ءم/ءن = ١/ن

∴ ءم/ءن = ك/ن حيث ك ثابت بالتكامل بالنسبة إلى ن

م = ك لو_هـ |ن| + ث

∵ ن > ٠ ∴ م = ك لو_هـ ن + ث

بعد أسبوعين كانت م = ٢٠٠

٢٠٠ = ك لو_هـ ٢ + ث (١)

بعد ٤ أسابيع كانت م = ٣٠٠

٣٠٠ = ك لو_هـ ٤ + ث (٢)

بطرح (٢) − (١)

١٠٠ = ك (لو_هـ ٤ − لو_هـ ٢) = ك لو_هـ ٢

∴ ك = ١٠٠/لو_هـ ٢ بالتعويض في (٢)

∴ ٣٠٠ = ١٠٠/لو_هـ ٢ × ٢ لو_هـ ٢ + ث ∴ ث = ١٠٠

∴ م = ١٠٠ لو_هـ ن/لو_هـ ٢ + ١٠٠ = ١٠٠ لو_٢ ن + ١٠٠

= ١٠٠ (١ + لو_٢ ن)

∴ (م)_ن=٨ = ١٠٠ (١ + لو_٢ ٨) = ٤٠٠

١٤

ءص/ءس ∝ ١/س ∴ ءص/ءس = ك/س حيث ك ثابت

الفصل 3

إجابات تمارين

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

إجابات تمارين 9

1

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب)

(٤) (أ) (٥) (ب) (٦) (ب)

(٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (ب)

(١٠) (جـ) (١١) (جـ) (١٢) (أ)

(١٣) (أ) (١٤) (أ) (١٥) (جـ)

(١٦) (ب) (١٧) (أ) (١٨) (جـ)

(١٩) (أ) (٢٠) (أ) (٢١) (أ)

2

(١) ∵ ص = س^{٣} − ٦ س + ٧

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣ س^{٢} − ٦

ص = س^{٣} − ٦ س + ٧

∴ توجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ∴ س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٣)

∴ الدالة متناقصة في]− ∞ ، ٢[

، متزايدة في]٢ ، ∞[

(٢) ∵ ص = ١ − ٤ س − س^{٢}

∴ المجال = ح ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = −٤ − ٢ س

∴ توجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ∴ س = −٢

∴ النقطة الحرجة هي (−٢ ، ٥)

∴ الدالة متناقصة في]− ∞ ، −٢[

، متزايدة في]−٢ ، ∞[

(٣) ∵ د(س) = س^{٣} − ٥ س^{٢} + ١

∴ المجال = ح ، د′(س) = ٥ س^{٢} − ١٠ س

∴ توجد د′(س)

∴ ٥ س^{٢} − ١٠ س = ٠ ∴ س = ٠ ، ٢

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ١) ، (٢ ، −٣)

∴ الدالة متزايدة في كل من]− ∞ ، ٠[

، متناقصة في]٠ ، ٢[

(٤) ∵ د(س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ١٢ س + ٢

∴ المجال = ح ، د′(س) = ٣ س^{٢} − ٦ س + ١٢

∴ توجد د′(س)

∴ ٣ س^{٢} − ٦ س + ١٢ = ٠

∴ ٣ (س^{٢} − ٢ س + ٤) = ٠

∴ س^{٢} − ٢ س + ٤ = ٠ ∴ س = ١ ± $\sqrt{-٣}$

∴ النقط الحرجة هي (١ ، ٩) ، (−٣ ، −٢٢)

∴ الدالة متزايدة في كل من]− ∞ ، ٣[

،]٣ ، ∞[، متناقصة في]٣ ، ٣[

(٥) ∵ د(س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٥

∴ المجال = ح

∴ د′(س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س

∴ توجد د′(س) = ٠

فإن ٣ س^{٢} − ١٢ س = ٠

∴ ٣ س (س − ٤) = ٠

∴ س = ٠ ، ٤

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ٥) ، (٤ ، −٢٧)

∴ الدالة متزايدة في كل من]− ∞ ، ٠[

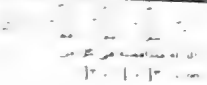
،]٤ ، ∞[، متناقصة في]٠ ، ٤[

(٦) ص = (س − ٢)^{٣} المجال = ح

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣ (س − ٢)^{٢}

∴ توجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فإن س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٠)



∴ الدالة متناقصة في كل من

]− ∞ ، ٣[،]٣ ، ∞[

، ومتزايدة في كل من]−٣ ، ٣[،]٣ ، ∞[

(١٤) ∵ د(س) = س^{٢} (س − ١)^{٢} ∴ المجال = ح

∴ د′(س) = ٢ س (س − ١)^{٢} + ٢ (س − ١) س^{٢}

= س (س − ١) (٣ س − ٢ + ٢ س)

= س (س − ١) (٥ س − ٢)

∴ توجد د′(س) = ٠ فإن س = ٠ ، ١ ، $\frac{٢}{٥}$

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ٠) ، (١ ، ٠)

، $\left(\frac{٢}{٥} ، \frac{١٦}{٣٧٥}\right)$

∴ الدالة متزايدة في كل من

]− ∞ ، ٠[، $\left]\frac{٢}{٥} ، ١\right[$ ،]١ ، ∞[

، متناقصة في $\left]٠ ، \frac{٢}{٥}\right[$

(١٥) د(س) = (س − ٣) (س − ١)^{٢} ∴ المجال = ح

∴ د′(س) = (س − ١)^{٢} + ٢ (س − ٣) (س − ١)

= (س − ١) (س − ١ + ٢ س − ٦)

= (س − ١) (٣ س − ٧)

∴ توجد د′(س) = ٠

فإن س = ١ ، $\frac{٧}{٣}$

∴ النقط الحرجة هي (١ ، ٠) ، $\left(\frac{٧}{٣} ، \frac{٢٥٦}{٢٧}\right)$

(٧) د(س) = [illegible] ∴ المجال = ح − {٣}

∴ د(س) غير معرفة عند س = ٣ ∉ المجال

∴ س = ٣ نقطة حرجة

[illegible]

∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، ٣[،]٣ ، ∞[

(٨) د(س) = $\sqrt[3]{\text{س} - ٢}$ ∴ المجال = ح

∴ د(س) = $\frac{١}{٣\sqrt[3]{\text{س} - ٢}}$

∴ د(س) غير معرفة عند س = ٢

∴ النقطة (٢ ، ٠) هي نقطة حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة في]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

(٩) د(س) = $\sqrt{١ - \text{س}}$ ∴ المجال =]−∞ ، ١]

∴ د(س) = $\frac{-١}{٢\sqrt{١ - \text{س}}}$

∴ د(س) غير معرفة عند س = ١

∴ النقطة (١ ، ٠) هي نقطة حرجة حدية

∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، ١[

(١٠) د(س) = $\sqrt[3]{\text{س} - ١}$ ∴ المجال = ح

∴ د(س) = $\frac{١}{٣\sqrt[3]{(\text{س} - ١)^{٢}}}$

∴ د(س) غير معرفة عند س = ١

∴ النقطة (١ ، ٠) هي نقطة حرجة

∴ الدالة متناقصة في ح

(١١) د(س) = $\sqrt[3]{\text{س}^{٢} - ١}$ المجال = ح

∴ د(س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt[3]{\text{س}^{٢} - ١}}$

∴ د(س) = صفر عند س = ٠

∴ د(س) غير معرفة عند س = ١ ، −١

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

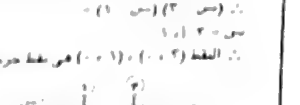
∴ متناقصة في كل من]−١ ، ٠[،]٠ ، ١[

(١٢) د(س) = $\sqrt[3]{\text{س}^{٢} - ٤}$ ∴ المجال = ح

∴ د(س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt[3]{\text{س}^{٢} - ٤}}$

∴ د(س) غير معرفة عند س = ٢ ، −٢

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠)



∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، −٢[

∴ متزايدة في]٢ ، ∞[

(١٣) د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٩}$

∴ المجال =]−∞ ، −٣] ∪ [٣ ، ∞[

∴ د(س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٩}}$

∴ د(س) غير معرفة عند س = ٣ ، −٣

∴ النقط الحرجة (٠ ، ٣) ، (٠ ، −٣)

∴ الدالة متزايدة في]٣ ، ∞[

∴ متناقصة في]−∞ ، −٣[

(١٤) د(س) = $\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$

∴ المجال = [−٣ ، ٣]

∴ د(س) = $\frac{-\text{س}}{\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}}$ ، بوضع د(س) = ٠

∴ س = ٠

∴ د(س) غير معرفة عند س = ٣ ، −٣

∴ النقطة (٠ ، ٣) هي نقطة حرجة

∴ النقط (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠) هي نقط حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة في]−٣ ، ٠[

ومتناقصة في]٠ ، ٣[

∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

(١٥) د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$

∴ المجال =]−∞ ، −١] ∪ [١ ، ∞[

∴ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ [س + ١] = $\frac{\text{س} + ١}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

∴ بوضع د(س) = ٠ فإن س = −١ ∉ المجال

∵ د(س) غير معرفة عند س = ١ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة غير موجودة

∴ الدالة متزايدة في]١ ، ∞[

(١٦) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ١}$

= $\frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ١)}$

∴ المجال = ح − {١ ، −١}

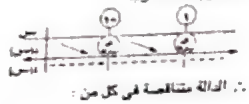
∴ د(س) = $\frac{(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ١)}$

∴ د(س) = $\frac{(\text{س} + ١)(١) - (\text{س} + ٢)(١)}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

= $\frac{-١}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

∵ د(س) غير معرفة عند س = −١ ∉ المجال

∴ لا توجد نقط حرجة



∴ الدالة متناقصة في كل من:

]−∞ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ∞[

(١٧) د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$

∴ المجال =]−∞ ، ١] ∪ [١ ، ∞[

∴ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ [س + ١] = $\frac{\text{س} + ١}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

∴ بوضع د(س) = ٠ فإن س = −١ ∉ المجال

∵ د(س) غير معرفة عند س = ١ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة غير موجودة

∴ الدالة متزايدة في]١ ، ∞[

(١٨) د(س) = $\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$

∴ المجال = [−٣ ، ٣]

∴ د(س) = $\frac{-\text{س}}{\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}}$ ، بوضع د(س) = ٠

∴ س = ٠

∴ د(س) غير معرفة عند س = ٣ ، −٣

∴ النقطة (٠ ، ٣) هي نقطة حرجة

∴ النقط (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠) هي نقط حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة في]−٣ ، ٠[

ومتناقصة في]٠ ، ٣[

∴ د(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ ، س ≠ ٢

∴ د(س) = $\frac{\text{س} - ٢ - \text{س}}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

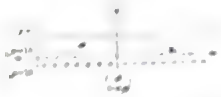
∴ د(س) = $\frac{-٢}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$ ، س ≠ ٢

∴ د(٢) ∉ د(٢)

∴ د(س) = غير معرفة ، س = ٢

∴ د(س) غير موجودة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٣)



∴ الدالة متزايدة في]−∞ ، ٢[

∴ متناقصة في]٢ ، ∞[

(٢٠) د(س) = |س − ٢| + ٢

∴ المجال = ح

∴ د(س) = $\begin{cases} \text{س} - ٢ + ٢ & \text{، س} \geq ٢ \\ -(\text{س} - ٢) + ٢ & \text{، س} < ٢ \end{cases}$

= $\begin{cases} \text{س} - ٠ & \text{، س} \geq ٢ \\ \text{س} + ٤ & \text{، س} < ٢ \end{cases}$

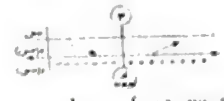
∴ د(س) = $\begin{cases} ١ & \text{، س} > ٢ \\ -١ & \text{، س} < ٢ \end{cases}$

∵ د(٢)$^{+}$ ≠ د(٢)$^{-}$

∴ د(س) = $\begin{cases} ١ & \text{، س} > ٢ \\ \text{غير موجودة} & \text{، س} = ٢ \\ -١ & \text{، س} < ٢ \end{cases}$

د(س) غير موجودة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٢)



∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، ٢[

ومتزايدة في]٢ ، ∞[

(٢١) د(س) = |س − ٢| + |س − ٣|

∴ د(س) = $\begin{cases} -(\text{س} - ٢) - (\text{س} - ٣) & \text{، س} \leq ٢ \\ (\text{س} - ٢) - (\text{س} - ٣) & \text{، ٢ < س} < ٣ \\ (\text{س} - ٢) + (\text{س} - ٣) & \text{، س} \geq ٣ \end{cases}$

∴ د(س) = $\begin{cases} -٢ & \text{، س} \leq ٢ \\ ١ & \text{، ٢ < س} < ٣ \\ ٢ & \text{، س} \geq ٣ \end{cases}$

∴ د(س) = $\begin{cases} -١ & \text{، س} < ٢ \\ ١ & \text{، س} > ٢ \end{cases}$

∴ د(٢)$^{+}$ ≠ د(٢)$^{-}$

∴ د(س) = $\begin{cases} \text{غير موجودة} & \text{، س} = ٢ \\ -١ & \text{، س} < ٢ \\ ١ & \text{، س} > ٢ \end{cases}$

∴ د(س) غير موجودة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٢)

∴ د(س) = $\begin{cases} -١ & \text{، س} < ٢ \\ \text{غير موجودة} & \text{، س} = ٢ \\ ١ & \text{، س} > ٢ \end{cases}$

إجابات تمارين 10

أ

① ص = س³ + ٤ س + ٩

∴ ص' = ٣ س² + ٤ ، وبوضع ص' = ٠

∴ س = −٢ ، ص'' = ٦ (موجب)

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = −٢

∴ د (−٢) = ٢

② ص = ٤ − ٦ س − س²

∴ ص' = −٦ − ٢ س ، بوضع ص' = ٠

∴ س = −٣ ، ص'' = −٢ (سالب)

∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = −٣

∴ د (−٣) = ١٣

③ ص = $\frac{1}{3}$ س³ − ٩ س + ٢

∴ ص' = س² − ٩ ، عندما ص' = ٠

∴ س = ٣ أو س = −٣ ، ص'' = ٢ س

∴ ص'' = ٦ (موجب) عند س = ٣

∴ الدالة قيمة صغرى محلية ، د (٣) = −١٦

∴ عند س = −٣ ، ص'' = −٦ (سالب)

∴ الدالة قيمة عظمى محلية ، د (−٣) = ٢٠

④ ∵ د (س) = ٤ س − س³

∴ د' (س) = ٤ − ٣ س²

∴ بوضع د' (س) = ٠ ، ٤ − ٣ س² = ٠

∴ س² = $\frac{4}{3}$ ، س = ±$\sqrt{\frac{4}{3}}$

∴ توجد قيمة عظمى محلية ، د ($\sqrt{\frac{4}{3}}$) = $\frac{16}{9}\sqrt{\frac{4}{3}}$

∴ د ($\frac{1}{2}$) < ١ ، موجبة

∴ توجد قيمة صغرى محلية ، د ($-\sqrt{\frac{4}{3}}$) = $-\frac{16}{9}\sqrt{\frac{4}{3}}$

⑤ ∵ د (س) = س³ − ٩ س² + ١٥

∴ د' (س) = ٣ س² − ١٨ س

= ٣ س (س − ٦)

∴ د' (س) = ٠ عندما س = ٠ ، أو س = ٦

∴ د'' (س) = ٦ س − ١٨

عند س = ٠ ، د'' (٠) < ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية هي د (٠) = ١٥

عند س = ٦ ، د'' (٦) > ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية هي د (٦) = −٩٢

⑥ ∵ د (س) = ٢ س³ + ٣ س² − ١٢ س + ٥

∴ د' (س) = ٦ س² + ٦ س − ١٢

= ٦ (س² + س − ٢)

= ٦ (س + ٢) (س − ١)

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −٢ ، أو س = ١

∵ د'' (س) = ١٢ س + ٦ ∴ د'' (−٢) < ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−٢) = ٢٥

∵ د'' (١) > ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (١) = −٢

⑦ د (س) = س³ + ٣ س² − ٩ س + ١

∴ د' (س) = ٣ س² + ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ ∴ ٣ س² + ٦ س − ٩ = ٠

∴ س² + ٢ س − ٣ = ٠

∴ س = ١ أو س = −٣ ∴ د'' (س) = ٦ س + ٦

∴ د'' (١) > ٠ ، موجب ، توجد قيمة صغرى محلية

∴ د'' (−٣) = −١٢ ، سالب ، توجد قيمة عظمى محلية

∴ د (−٣) = ٢٨

⑧ ∵ د (س) = س³ − ٩ س² + ١٥

∴ د' (س) = ٣ س² − ١٨ س

= ٣ س (س − ٦)

∴ د' (س) = ٠ عندما س = ٠ ، أو س = ٦

∴ د'' (س) = ٦ س − ١٨

عند س = ٠ ، د'' (٠) < ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية هي د (٠) = ١٥

عند س = ٦ ، د'' (٦) > ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية هي د (٦) = −٩٢

⑨ ∵ د (س) = س³ − ٩ س² + ٢٤ س + ٣

∴ د' (س) = ٣ س² − ١٨ س + ٢٤

= ٣ (س² − ٦ س + ٨)

= ٣ (س − ٢) (س − ٤)

∴ د' (س) = ٠ عندما س = ٢ ، أو س = ٤

∵ د'' (س) = ٦ س − ١٨

∴ د'' (٢) = −٦ ، د'' (٤) = ٦

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (٢) = ٢٣

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٤) = ١٩

⑩ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٥

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑪ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ٧

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٥

⑫ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٥

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑬ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ٧

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٥

⑭ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٥

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑮ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑯ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑰ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑱ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

ب

① ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

② ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

③ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

④ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑤ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑥ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑦ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑧ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑨ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑩ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑪ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑫ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑬ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑭ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑮ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑯ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑰ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑱ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

ج

① ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

② ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

③ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

④ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑤ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑥ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑦ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑧ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑨ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑩ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑪ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑫ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑬ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑭ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑮ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑯ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑰ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑱ ∵ د (س) = س³ − ٣ س² − ٩ س + ٢

∴ د' (س) = ٣ س² − ٦ س − ٩

∴ د' (س) = ٠ عندما س = −١ ، أو س = ٣

∵ د'' (س) = ٦ س − ٦

∴ د'' (−١) < ٠ ، د'' (٣) > ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−١) = ١٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (٣) = −٢٢

⑥ ∵ د(س) = { س² ، س ≤ ٢ ؛ ٤ ، س > ٢ }

∴ د(٢) = ٤

∴ د(س) = { ٢س ، س ≤ ٢ ؛ ٤ ، س > ٢ }

∴ د(س) = ٠ عندما س = ٠

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

∵ د(٠) = ٠

⑦ ∵ د(س) = { س² − ٢س² ، س ≤ ٢ ؛ ٢س² − ٢س ، س > ٢ }

د(٢) = ٩ ، د(٣) = −٩

∴ د(٢) غير موجودة.

∴ د(س) = { ٣س² − ٦س ، س < ٢ ؛ −٣س² + ٦س ، س > ٢ }

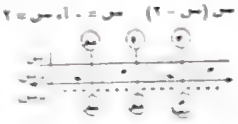
عندما س < ٢

د(س) = ٠ عندما ٣س (س − ٢) = ٠

س = ٠ (مرفوض) أو س = ٢ (مرفوض)

عندما س > ٢

−٣س (س − ٢) = ٠ ∴ س = ٠ أو س = ٢



∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٢

، د(٢) = ٤

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

، د(٠) = ٠

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

، د(٣) = ٠

١٥

① د(١) = ٠ ، د(−١) = ٩ ∴ د(−١) غير موجودة

د(س) = { ٢س ، س < ٠ ؛ ٢ ، س > ٠ }

∴ د(س) = ٠ عندما س = ٠ (مرفوض)

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند (٠ ، ٠)

② د(٢) = ١٠ ، د(٣) = ١٠

∴ د(٣) غير موجودة

∴ د(س) = { ١ ، س > ٢ ؛ −١ ، س < ٢ }

∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٠)

③ د(٢) = ٢ ، د(−٢) = −١

∴ د(٢) غير موجودة.

∴ د(س) = { ٢ ، س > ٢ ؛ −١ ، س < ٢ }

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، ٠)

④ د(١) = ٦ ، د(−١) = ٦ ∴ د(١) = ٦

د(س) = { ٦س ، س ≥ ١ ؛ ٦ ، س < ١ }

د(س) = ٠ عندما س = ٠ (مرفوض)

∴ لا يوجد للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، ٠)

، الدالة قيمة عظمى محلية عند (−٢ ، ٠)

⑤ د(١) = ٦ ، د(−١) = ٢

∴ د(١) غير موجودة

د(س) = { ٢ ، س > ١ ؛ −٤ − ٢س ، س < ١ }

د(س) = ٠ عندما س = −٢

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، ٠)

، الدالة قيمة عظمى محلية عند (−٢ ، ٠)

⑥ د(−١) = ٤ ، د(١) = ٢

∴ د(١) غير موجودة.

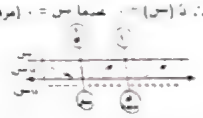
د(س) = { ٢س − ٢ ، س > ١ ؛ ٢س ، س < ١ }

• عندما س > ١

∴ د(س) = ٠ عندما س = $\frac{١}{٢}$

• عندما س < ١

∴ د(س) = ٠ عندما س = ٠ (مرفوض)



∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند ($\frac{١}{٢}$ ، ٠)

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند (٠ ، ٠)

الدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، ٠)

١٤

س = أ س² ، ب س² + جـ س ، ٤

س' = ٢ أ س² ، ٢ ب س + جـ

س'' = ٦ أ س + ٢ ب

∵ (٠ ، ٠) ∈ الدالة

∴ ٠ = ٢٧ أ + ٩ ب + ٣ جـ + ٤ (١)

، (٣ ، ٠) ∈ الدالة ∴ ٠ = ٩ أ + ٣ ب + جـ

∴ ٠ = ١٢ أ + ٤ ب + جـ (٢)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ أ = −١ ، ب = ٤ ، جـ = −٨

∴ د(٣) = −٢ ∴ (٣ ، ٢) نقطة عظمى محلية

١٣

س = أ س² ، ب س² + جـ س ، ٥

س' = ٣ أ س² ، ٢ ب س + جـ

س'' = ٦ أ س + ٢ ب

∵ (٢ ، ٠) ∈ الدالة

∴ ٠ = ٢٧ أ + ٩ ب + ٣ جـ + ٥ (١)

، (٠ ، ٠) ∈ الدالة ∴ ٥ = ٥

، (٣ ، ٢) ∈ الدالة

٢ = ٢٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ٥ (٢)

، (٣ ، ٢) نقطة حرجة

∴ د'(س) = ٠ عند س = ٣

∴ ٠ = ١٢ أ + ٤ ب + جـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ أ = −١ ، ب = ٤ ، جـ = −٨

∴ د(٣) = −٢ ∴ (٣ ، ٢) نقطة عظمى محلية

١٢

س = أ س² ، ب س² + جـ س + ٤

س' = ٣ أ س² ، ٢ ب س + جـ

س'' = ٦ أ س + ٢ ب

∵ (٠ ، ٠) ∈ الدالة

∴ ٠ = ٢٧ أ + ٩ ب + ٣ جـ + ٤ (١)

، (٣ ، ٠) ∈ الدالة ∴ ٠ = ٠

، (٣ ، ٢) ∈ الدالة

٢ = ٢٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ٤ (٢)

، (٣ ، ٢) نقطة حرجة

∴ د'(س) = ٠ عند س = ٣

∴ ٠ = ١٢ أ + ٤ ب + جـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ أ = −١ ، ب = ٤ ، جـ = −٨

∴ د(٣) = −٢ ∴ (٣ ، ٢) نقطة عظمى محلية

١٧

س = أ س² ، ب س² + جـ س + ٤

س' = ٣ أ س² ، ٢ ب س + جـ

١٦

إرشادات لحل رقم ١٥

① ∵ س = س^س ∴ لو س = س لو س

∴ $\frac{١}{س}$ س' = س × $\frac{١}{س}$ + لو س

= ١ + لو س

∴ س' = س (١ + لو س) = س^س (١ + لو س)

عند نقطة التوقف للدالة يكون س' = ٠

∴ س^س (١ + لو س) = ٠

∴ لو س = −١ ∴ س = $لو^{-١}$ = $\frac{١}{ه}$

② ∵ د(س) = س + $\frac{١}{س}$

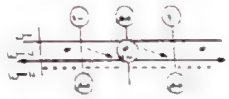
∴ د'(س) = ١ − $\frac{١}{س^٢}$

بوضع د'(س) = ٠ ∴ س² = ١

∴ س = ±١

∴ عند س = −١ توجد قيمة عظمى للدالة

، عند س = ١ توجد قيمة صغرى للدالة



∴ أ = −١ ، ب = ١

∴ د(أ) = د(−١) = −٢ ، د(ب) = د(١) = ٢

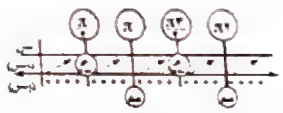
∴ د(أ) < د(ب)

③ ∵ د(س) = ظا س − س

∴ د'(س) = قا² س − ١ = ظا² س

بوضع د'(س) = ٠ ∴ ظا² س = ٠

∴ س = ن π حيث ن ∈ ص



∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٤

، د(٤) = ١

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٥

، د(٥) = ٠

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

، د(٣) = ٠

② د(س) = { س² − ٤س + ٣ ، س ≤ ٣ ؛ ٢س − ٦ ، ٣ < س < ٤ ؛ −س + ٦ ، ٤ ≤ س < ٦ ؛ س − ٦ ، س ≥ ٦ }

د(٣) = ٢ ، د(٣⁺) = ٢ ∴ د(٣) = ٢

، د(٤⁻) = ٢ ، د(٤⁺) = −١

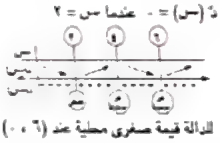
∴ د(٤) غير موجودة

، د(٦⁻) = −١ ، د(٦⁺) = ١

∴ د(٦) غير موجودة.

∴ د'(س) = { ٢س − ٤ ، س < ٣ ؛ ٢ ، ٣ < س < ٤ ؛ −١ ، ٤ < س < ٦ ؛ ١ ، س > ٦ }

، د'(س) = ٠ عندما س = ٢



∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند (٦ ، ٠)

الدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، −١)

الدالة قيمة عظمى محلية عند (٤ ، ٢)

③ د(١⁻) = ٢ ، د(١⁺) = ٠ ∴ د(١) غير موجودة.

، د(٤⁻) = ٠ ، د(٤⁺) = −١

الدالة الرئيسية على الفترة ولها عدد لا نهائي من النقط الحرجة وليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية.

① ∵ د(س) = لو ق(س)

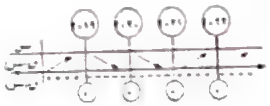
∴ ق(س) = $لو^{ه}$ ق(س)

∴ ق'(س) = $لو^{ه}$ ق(س) × ق'(س)

وبوضع ق'(س) = ٠

∴ ق'(س) = ٠

∴ س = ٢٠١٩ أو ٢٠٢٠ أو ٢٠٢١ أو ٢٠٢٢



∴ عند س = ٢٠١٩ توجد قيمة عظمى للدالة ق(س)

∴ القيمة العظمى المحلية هي د(٢٠١٩)

١٦

① د(س) = { (س − ٣)(س − ٥) ، س ≤ ٥ ؛ −(س − ٣)(س − ٥) ، ٣ ≤ س < ٥ ؛ (س − ٣)(س − ٥) ، س > ٣ }

∵ د'(٥⁺) = ٢ ، د'(٥⁻) = −٢

∴ د'(٥) غير موجودة

، د'(٣⁺) = ٢ ، د'(٣⁻) = −٢

∴ د'(٣) غير موجودة.

∴ د'(س) = { ٢س − ٨ ، س > ٥ ؛ −٢س + ٨ ، ٣ < س < ٥ ؛ ٢س − ٨ ، س < ٣ }

، د'(س) = ٠ عندما س = ٤

الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، د(٢) = ٣

لكل س ∈]-١ ، ٢[حيث د′(س) = ٠ ،

فى نفس الوقت

فى نفس الوقت

اختبار تعريفى 11

١

د′(س) = ٣ س² - ١٢ س + ٩

د″(س) = ٦ س - ١٢

د″(س) = ٠ عند س = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى محلية = ٢

وتبلغها عند س = ١

∴ للدالة قيمة صغرى محلية = ٤ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٥ وتبلغها عند س = ٠

(١٠) ص = ٢ س³ + ٣ س² - ١٢ س + ١

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س² + ٦ س - ١٢

= ٦ (س² + س - ٢)

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

عند س = -٢ ∉ [-١ ، ٥]

أ، س = ١ ∈ [-١ ، ٥]

، ∵ د(-١) = ١٤ ، د(١) = -٦ ، د(٥) = ٢٦٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢٦٦

وتبلغها عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٦ وتبلغها عند س = ١

(١١) ص = ٢ س³ + ٣ س² + ١

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س² + ٦ س = ٦ س (س + ١)

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ عند س = ٠ ∈ [-١٠ ، ١٢]

، س = -١ ∈ [-١٠ ، ١٢]

، ∵ د(-١٠) = -١٦٩٩ ، د(-١) = ٢

، د(٠) = ١ ، د(١٢) = ٣٨٨٩

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣٨٨٩

وتبلغها عند س = ١٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١٦٩٩

وتبلغها عند س = -١٠

(١٢) د(س) = (س - ١) (س - ٢)²

∴ د′(س) = (س - ١) × ٢ (س - ٢)

+ (س - ٢)²

= (س - ٢) (٣ س - ٤)

، د′(س) = ٠

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣٦

وتبلغها عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = ١ وتبلغها عند س = ٠

(١٣) د(س) = ٢ س - ٣ س^$\frac{٢}{٣}$

∴ د′(س) = ٢ - ٢ س^$\frac{-١}{٣}$ = ٢ - $\frac{٢}{\sqrt[٣]{س}}$

، د′(س) = ٠ عند س = ١ ∈ [-١ ، ٢]

، د′(س) غير معرفة عند س = ٠ ∈ [-١ ، ٢]

، ∵ د(-١) = -٥ ، د(٠) = ٠ ، د(١) = -١

، د(٢) = ٦ - ٣ × $\sqrt[٣]{٢}$ ≈ ٢,٤ ،

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = صفر

وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٥ وتبلغها عند س = -١

(١٤) د(س) = ٣ س³ - ٤ س²

∴ د′(س) = ١٢ س² - ١٢ س²

= ١٢ س² (س - ١)

، د′(س) = ٠

عند س = ٠ ∈ [-١ ، ٢]

، س = ١ ∈ [-١ ، ٢]

، ∵ د(-١) = ٧ ، د(٠) = ٠

، د(١) = -١ ، د(٢) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦

وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١ وتبلغها عند س = ١

(١٥) د(س) = ٢ س³ - س² + ١

∴ د′(س) = ٨ س² - ٢ س

= ٢ س (٤ س² - ١)

د″(س) = ٠ عند س = ٢ ∉ [-١ ، ١]

أ، س = -٢ ∉ [-١ ، ١]

، د″(س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ [-١ ، ١]

، ∵ د(-١) = ١٠ ، د(٢) = ٦ ، د(١) = $\frac{١}{٢}$

∴ للدالة قيمة صغرى مطلقة = ١

وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = ١ وتبلغها عند س = ٢

(٢) د(س) = $\frac{١}{س - ١}$

د′(س) = $\frac{(س - ١)(٠) - (١)(١)}{(س - ١)^٢}$

= $\frac{-١}{(س - ١)^٢}$

∴ د′(س) = ٠ عند س = ١ ∈ [-١ ، ٢]

أ، س = -١ ∈ [-١ ، ٢]

، ∵ د(-١) = -٢ ، د(١) = ٢

، د(٢) = $\frac{١}{٥}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٢ وتبلغها عند س = -١

(٤) د(س) = س + $\frac{١}{س + ٢}$

∴ د′(س) = ١ + $\frac{-١}{(س + ٢)^٢}$ ، د′(س) = ٠

عند س = -١ ∉ [-٢ ، ٠] ، س = -٣ ∉ [-٢ ، ٠]

، د′(س) غير معرفة عند س = -٢ ∉ [-٢ ، ٠]

، ∵ د(٠) = $\frac{١}{٢}$ ، د(٣) = ٣ $\frac{١}{٥}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣ $\frac{١}{٥}$ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{١}{٢}$ وتبلغها عند س = ٠

[illegible]

٥

[illegible]

٢ جا س جتا س = جا ٢ س

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ ∈ [$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$]

∴ س = $\frac{٥\pi}{٦}$ ∈ [$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$]

∴ د ($\frac{\pi}{٦}$) = $\frac{١}{٢}$ ، د ($\frac{٥\pi}{٦}$) = −١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١ وتبلغها عند س = $\frac{\pi}{٦}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = −١ وتبلغها عند س = $\frac{٥\pi}{٦}$

[illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{١}{٢}$

وتبلغها عند س = ١

② د (س) = ٢ جا س − ٢ جا ٢ س

∴ د (س) = ٢ جا س − ٤ جا س جتا س

٢ جا س (١ − ٢ جتا س)

∴ د (س) = ٠ عند ٢ جا س = ٠

وتبلغها عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ ∉ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

∴ جتا س = $\frac{١}{٢}$ وتبلغها عند س = $\frac{\pi}{٣}$ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

∴ س = $\frac{٥\pi}{٣}$ ∉ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

∴ د ($\frac{\pi}{٣}$) = $\frac{٣}{٢}$ ، د ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢ ، د (٠) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{٣}{٢}$

وتبلغها عند س = $\frac{\pi}{٣}$

[illegible]

∴ د (س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [−١ ، ٢]

∴ د (س) غير معرفة عند س = ٤ ∉ [−١ ، ٢]

∴ س = −١ ∈ [−١ ، ٢]

∵ د (−١) = ٠ ، د (٠) = ٤ ، د (٢) = $\sqrt{٧}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٤ وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى هى ٠ وتبلغها عند س = −١

① د (س) = $\sqrt[٣]{(س − ١)^٢}$

∴ د′ (س) = $\frac{٢}{٣}$ (س − ١)$^{\frac{-١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س − ١}}$

∴ د′ (س) غير معرفة عند س = ١ ∈ [٠ ، ٩]

∵ د (٠) = ١ ، د (١) = ٠ ، د (٩) = ٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٤ وتبلغها عند س = ٩

ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر وتبلغها عند س = ١

⑤ د (س) = س $\sqrt{١ − س}$

∴ د′ (س) = س × $\frac{−١}{٢\sqrt{١ − س}}$ + $\sqrt{١ − س}$

= $\frac{−س + ٢ − ٢س}{٢\sqrt{١ − س}}$ = $\frac{٢ − ٣س}{٢\sqrt{١ − س}}$

∴ د′ (س) = ٠ عند س = $\frac{٢}{٣}$ ∈ [−١ ، ١]

∴ د′ (س) غير معرفة عند س = ١ ∈ [−١ ، ١]

∵ د (−١) = −$\sqrt{٢}$ ، د ($\frac{٢}{٣}$) = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٩}$

، د (١) = صفر

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٩}$ وتبلغها عند س = $\frac{٢}{٣}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = −$\sqrt{٢}$ وتبلغها عند س = −١

[illegible]

∴ د′ (س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [−١ ، ٢]

∴ د′ (س) غير معرفة عند س = $\frac{١}{٢}$ ∉ [٠ ، ٢]

∵ د (٠) = ٠ ، د ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ ، د (٢) = ٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٦ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى $\frac{١}{٢}$ وتبلغها عند س = $\frac{١}{٢}$

⑦ د (س) = $\sqrt{٨ س − س^٢}$

∴ د′ (س) = $\frac{٨ − ٢س}{٢\sqrt{٨س − س^٢}}$ = $\frac{٤ − س}{\sqrt{٨س − س^٢}}$

∴ د′ (س) = ٠ عند س = ٤ ∈ [٠ ، ٨]

∴ د′ (س) غير معرفة عند س = ٠ ، أو ٨

وكل منهما ينتمى للفترة [٠ ، ٨]

∵ د (٠) = صفر ، د (٤) = ٤ ، د (٨) = صفر

∴ للدالة قيمة عظمى هى ٤ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى صفر وتبلغها عند س = ٠ ، عند س = ٨

⑧ د (س) = $\sqrt[٣]{س^٢ − ٤}$

∴ د′ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س^٢ − ٤)$^{\frac{-٢}{٣}}$ (٢ س)

= $\frac{٢س}{٣\sqrt[٣]{(س^٢ − ٤)^٢}}$

∴ د′ (س) = ٠ عند س = صفر ∈ [−١ ، ٤]

∴ د′ (س) غير معرفه عند س = ٢ ∈ [−١ ، ٤]

أ، س = −٢ ∉ [−١ ، ٤]

∵ د (−١) = −$\sqrt[٣]{٣}$ ، د (٠) = −$\sqrt[٣]{٤}$

، د (٢) = صفر ، د (٤) = $\sqrt[٣]{١٢}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى $\sqrt[٣]{١٢}$ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −$\sqrt[٣]{٤}$ وتبلغها عند س = ٠

[illegible]

∴ د′ (س) = ٠ ∈ [−٢ ، ١]

∴ د′ (س) غير معرفه عند س = ٠ ∉ [−٢ ، ١]

∵ د (−٢) = ١ ، د (١) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ١ وتبلغها عند س = ٢

② د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ ∴ د′ (س) = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

∴ د′ (س) غير معرفه عند س = ٠ ∈ [−٨ ، ٨]

∵ د (−٨) = −٢ ، د (٨) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند س = ٨

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −٢ وتبلغها عند س = −٨

[illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى صفر

وتبلغها عند س = صفر

٤

① د (س) = $\sqrt{١ − س^٢}$

∴ د′ (س) = $\frac{−٢س}{٢\sqrt{١ − س^٢}}$ = $\frac{−س}{\sqrt{١ − س^٢}}$

∴ د′ (س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [−١ ، ١]

∴ د′ (س) غير معرفه عند س = ١ ∉ [−١ ، ١]

∵ د (٠) = ١ ، د (١) = ٠

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ١ وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ٠ وتبلغها عند س = ١

② د (س) = $\sqrt{س − ١}$ ∴ د′ (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س − ١}}$

∴ د′ (س) غير معرفه عند س = ١ ∉ [٠ ، ٢]

∵ د (١) = ٠ ، د (٢) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ١ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ٠ وتبلغها عند س = ١

③ د (س) = س لو$_{هـ}$ س

∴ د′ (س) = س × $\frac{١}{س}$ + لو$_{هـ}$ س × ١

∴ د′ (س) = ١ + لو$_{هـ}$ س

∴ د′ (س) = ٠ ∈ [٠ ، ٢]

∴ د′ (س) غير معرفه عند س = ٠ ∉ [٠ ، ٢]

∵ د (١) = ٠ ، د (٢) = ٢ لو$_{هـ}$ ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٢ لو$_{هـ}$ ٢ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ٠ وتبلغها عند س = ١

[illegible]

∴ د′ (س) = ٠ عند س = ٢ ∈ [٠ ، $\frac{٥}{٢}$]

∴ د′ (س) غير معرفة عند س = ١ ∉ [٠ ، $\frac{٥}{٢}$]

∵ د ($\frac{٥}{٢}$) = $\frac{٥}{٢}$ ، د (٢) = ٢ ، د (٥) = $\frac{٥}{٢}$

∴ للدالة قيمة صغرى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة عظمى مطلقة هى $\frac{٥}{٢}$ وتبلغها عند س = $\frac{٥}{٢}$ ، ٥

⑩ د (س) = $\frac{\sqrt[٣]{س − ٢}}{س}$

∴ د′ (س) = $\frac{س × \frac{١}{٣}(س − ٢)^{\frac{-٢}{٣}} − \sqrt[٣]{س − ٢} × ١}{س^٢}$

= $\frac{س − ٣(س − ٢)}{٣س^٢\sqrt[٣]{(س − ٢)^٢}}$

= $\frac{−٢س + ٦}{٣س^٢\sqrt[٣]{(س − ٢)^٢}}$

∴ د′ (س) = ٠ عند س = ٣ ∈ [١ ، ٤]

∴ د′ (س) غير معرفه عند س = ٢ ∈ [١ ، ٤]

أ، س = ٠ ∉ [١ ، ٤]

∵ د (١) = −١ ، د (٢) = ٠ ، د (٤) = $\frac{\sqrt[٣]{٢}}{٤}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى $\frac{\sqrt[٣]{٢}}{٤}$ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −١ وتبلغها عند س = ١

[illegible]

∴ د′ (س) = $\frac{٢ − ٢س − س}{٢\sqrt{س − ١}}$ = $\frac{٢ − ٣س}{٢\sqrt{س − ١}}$

∴ د′ (س) = ٠ عند س = $\frac{٢}{٣}$ ∈ [٠ ، ٢]

∴ د′ (س) غير معرفة عند س = ١ ∉ [٠ ، ٢]

∵ د (٠) = ٢ ، د ($\frac{٢}{٣}$) = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، د (٢) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ وتبلغها عند س = $\frac{٢}{٣}$

[illegible]

∴ د′ (س) = $\begin{cases} ٢ & س < ١ \\ ٠ & س = ١ \\ ٢ & س > ١ \end{cases}$

• في حالة س < ١ ∴ د′ (س) = ٢

∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ لا تحقق

∵ د (−٢) = −١ ، د (٢) = ٨

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٨ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −١ وتبلغها عند س = −٢

② د (س) = $\begin{cases} (س + ٣)^٢ & ، س < ٠ \\ (س − ٣)^٢ & ، س \geq ٠ \end{cases}$

∵ د′ (٠$^+$) ≠ د′ (٠$^-$)

∴ د′ (٠) غير موجودة.

د′ (س) = $\begin{cases} ٢(س + ٣) & ، س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٠ \\ ٢(س − ٣) & ، س > ٠ \end{cases}$

، د′ (س) = ٠ في حالة س < ٠

∴ ٢ (س + ٣) = ٠

∴ س = −٣ ∉ [−٢ ، ٢]

د′ (س) = ٠ في حالة س > ٠

∴ ٢ (س − ٣) = ٠

∴ س = ٣ ∉ [−٢ ، ٢]

∵ د (−٢) = ١ ، د (٠) = ٩ ، د (٢) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٩ وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ١

وتبلغها عند س = −٢ ، س = ٢

[illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٩ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ٦ وتبلغها عند س = ٠

(٤) د(س) = { س² ، س ≥ ٢ ؛ ٢ ، س < ٢ }

∵ د'(٢⁺) ≠ د'(٢⁻)

∴ د'(٢) = غير موجودة.

∴ د'(س) = { ٢س ، س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ ٢س ، س > ٢ }

∴ د'(س) = ٠ فى حالة س < ٢

∴ ٢س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [-٣ ، ٢]

، د'(س) = ٠ فى حالة س > ٢

∴ ٢س = ٠ ∴ س = ٠ لا تحقق س > ٢

، ∵ د(-٣) = -٤ ، د(٠) = ٥

، د(٢) = ١ ، د(٣) = ٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٦ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة هى -٤ وتبلغها عند س = -٣

(٥) د(س) = { ٢س² + ١٢س - ١ ، -١ ≤ س < ٢ ؛ ٢٧ - س ، ٢ ≤ س ≤ ٣ }

∵ د'(٢⁺) ≠ د'(٢⁻)

∴ د'(٢) غير موجودة.

∴ د'(س) = { ٦س + ١٢ ، -١ ≤ س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ -١ ، ٢ < س ≤ ٣ }

، عند س ∉ [-١ ، ٢]

د'(س) = ٠ فإن ٦س + ١٢ = ٠

∴ س = -٢ ∉ [-١ ، ٢]

، عند س = ٠ ∈ [-٣ ، ٣] (مرفوض)

، د(-١) = -١ ، د(٣) = ٢٧

، د(٢) = ٢٥

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٢٧ وتبلغها عند س = ٣

، قيمة صغرى مطلقة هى -١ وتبلغها عند س = -١

(٧) د(س) = |س| + ٢

∴ { -س + ٢ ، س < ٠ ؛ س + ٢ ، س ≥ ٠ }

، ∵ د'(٠⁺) ≠ د'(٠⁻)

∴ د'(٠) غير موجودة

∴ د'(س) = { -١ ، س < ٠ ؛ غير موجودة ، س = ٠ ؛ ١ ، س > ٠ }

∴ د'(س) ≠ ٠ ، س ≤ ٢

، ∵ د(-١) = ٣ ، د(٠) = ٢ ، د(٢) = ٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٤ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند س = ٠

(٨) د(س) = ٣ - |س - ١|

= { س + ٢ ، س ≤ ١ ؛ -س + ٤ ، س ≥ ١ }

∵ د'(١⁺) ≠ د'(١⁻)

∴ د'(١) غير موجودة.

∴ د'(س) = { ١ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ -١ ، س > ١ }

∴ د'(س) ≠ ٠

، ∵ د(٠) = ٢ ، د(١) = ٣ ، د(٣) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = ١ وتبلغها عند س = ٣

(٩) د(س) = |س² - ١| ، س ∈ [-١ ، ٢] فى الفترة [-١ ، ٢]

، د(س) = س² - ١

، د'(س) = ٢س

∴ د'(س) = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [-١ ، ٢]

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٣ وتبلغها عند س = ٢

، قيمة صغرى مطلقة هى -١ وتبلغها عند س = ٠

(١٠) د(س) = |س² - ٤| ، س ∈ [-٢ ، ٢] فى الفترة [-٢ ، ٢]

، د(س) = س² - ٤

، د'(س) = ٢س

∴ د'(س) = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [-٢ ، ٢]

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٤ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ٠ وتبلغها عند س = ٠

(١١) د(س) = |س² - ٤| ، س ∈ [-٢ ، ٢] فى الفترة [-٢ ، ٢]

، د(س) = ٤ - س² ، د'(س) = -٢س

∴ د'(س) = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [-٢ ، ٢]

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٤ وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ٠ وتبلغها عند س = ٢

إجابات تمارين 12

١

(١) د(س) = س³ - ٤س + ٢

د'(س) = ٣س² - ٤

د''(س) = ٦س (موجبة لجميع قيم س)

∴ المنحنى محدب لأسفل ولا توجد نقط انقلاب.

(٢) د(س) = ٢س³ - ٦س² + ٢

د'(س) = ٦س² - ١٢س

د''(س) = ١٢س - ١٢

بوضع د''(س) = ٠

∴ س = ١

المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، ١[

وفى]١ ، ∞[

وليس له نقطة انقلاب.

(٣) د(س) = (س - ١)³ (س - ٢)

د'(س) = (س - ١)³ + ٣ (س - ١)² (س - ٢)

د''(س) = ٣ (س - ١)² + ٦ (س - ١) (س - ٢)

= ٣ (س - ١) (س - ١ + ٢س - ٤)

= ٣ (س - ١) (٣س - ٥)

بوضع د''(س) = ٠

س = ١ ، س = ٥/٣

المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، ١[

ومحدب لأسفل فى]٥/٣ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (١ ، ٠)

(٤) ص = ١/٣ س³ - ٩س + ٢

ءص/ءس = س² - ٩ ، ء²ص/ءس² = ٢س

بوضع ء²ص/ءس² = ٠ ∴ ٢س = ٠ ∴ منها س = ٠

المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، ٠[

ومحدب لأسفل فى]٠ ، ∞[

وتوجد نقطة انقلاب هى (٠ ، ٢)

(٥) د(س) = ١ + ٦س - ٢س³

د'(س) = ٦ - ٦س²

د''(س) = -١٢س

بوضع د''(س) = ٠

منها س = ٠

المنحنى محدب لأسفل فى]-∞ ، ٠[

ومحدب لأعلى فى]٠ ، ∞[

ونقطة الانقلاب هى (٠ ، ١)

(٦) د(س) = ٤ - ٦س - ٣س²

د'(س) = -٦ - ٦س

د''(س) = -٦ (سالبة لجميع قيم س)

المنحنى محدب لأعلى ولا توجد نقط انقلاب.

(٧) د(س) = س³ - س²

د'(س) = ٣س² - ٢س

د''(س) = ٦س - ٢

بوضع د''(س) = ٠

منها ٦س - ٢ = ٠

∴ س = ١/٣

المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، ١/٣[

المنحنى محدب لأسفل]١/٣ ، ∞[

نقطة الانقلاب (١/٣ ، ٢/٢٧)

(٨) د(س) = س³ - ٦س² + ٩

د'(س) = ٣س² - ١٢س

د''(س) = ٦س - ١٢

بوضع د''(س) = ٠

٦س - ١٢ = ٠

∴ س = ٢

المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، ٢[

المنحنى محدب لأسفل فى]٢ ، ∞[

نقطة انقلاب (٢ ، -٧)

(٩) د(س) = ٤س³ - ١٢س² + ٥

د'(س) = ١٢س² - ٢٤س

د''(س) = ٢٤س - ٢٤

بوضع د''(س) = ٠

∴ س = ١

المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، ١[

ومحدب لأسفل فى]١ ، ∞[

ونقطة انقلاب (١ ، ٥)

(١٠) د(س) = ١٥س + ٦س³ - س⁴

د'(س) = ١٥ + ١٢س - ٤س³

د''(س) = ١٢ - ٦س

بوضع د''(س) = ٠

١٢ - ٦س = ٠

∴ س = ٢

المنحنى محدب لأسفل فى]-∞ ، ٢[

ومحدب لأعلى فى]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، ٤٦)

(١١) د(س) = (س - ٢)³ - ١

د'(س) = ٣ (س - ٢)²

د''(س) = ٦ (س - ٢)

بوضع د''(س) = ٠

منها س = ٢

المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، ٢[

ومحدب لأسفل فى]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، -١)

(١٢) د(س) = ١٢س - ٦

بوضع د''(س) = ٠

∴ س = ١/٢

المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، ١/٢[

ومحدب لأسفل فى]١/٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (١/٢ ، ١١/٢)

(١٣) د(س) = (س - ١)³ (س - ٢)

د'(س) = (س - ١)³ + ٣ (س - ١)² (س - ٢)

د''(س) = ٣ (س - ١)² + ٦ (س - ١) (س - ٢)

= ٣ (س - ١) (س - ١ + ٢س - ٤)

= ٣ (س - ١) (٣س - ٥)

بوضع د''(س) = ٠

س = ١/٣

المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، ١/٣[

ومحدب لأسفل فى]١/٣ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (١/٣ ، ٢٠/٢٧)

(١٤) د(س) = (س² - ٤)²

د'(س) = ٢ (س² - ٤) × ٢س

= ٤س (س² - ٤)

د''(س) = ٤س × ٢س + ٤ (س² - ٤)

= ٨س² + ٤س² - ١٦

= ١٢س² - ١٦

بوضع د''(س) = ٠ ∴ ١٢س² - ١٦ = ٠

س² = ١٦/١٢ = ٤/٣

∴ س = ± ٢/√٣ = ± ٢√٣/٣

المنحنى مقعر لأعلى في]٠ ، ∞[

ومقعر لأسفل في]-∞ ، ٠[

وله نقطة انعطاف (٠ ، صفر)

② ∵ ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٩}$

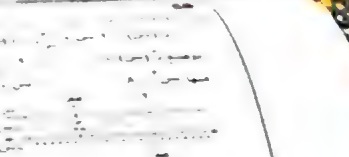
∴ ق′(س) = $\frac{\text{س}^{٢}+٩ - ٢\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+٩)^{٢}}$

∴ ق″(س) = $\frac{(\text{س}^{٢}+٩)(٢\text{س}) - ٢\text{س}(٢\text{س}^{٢}+١٨)}{(\text{س}^{٢}+٩)^{٣}}$

∴ ق″(س) = $\frac{٢\text{س}^{٣}+١٨\text{س} - ٤\text{س}^{٣}-٣٦\text{س}}{(\text{س}^{٢}+٩)^{٣}}$

∴ ق″(س) = $\frac{-٢\text{س}(\text{س}^{٢}-٩)}{(\text{س}^{٢}+٩)^{٣}}$ ، وضع ق″(س) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٣ ، س = -٣



∴ المنحنى مقعر لأسفل في]-∞ ، -٣[∪]٠ ، ٣[

ومقعر لأعلى في]-٣ ، ٠[∪]٣ ، ∞[

وله نقط انعطاف (-٣ ، $\frac{٣}{٢}$) ، (٠ ، ٠) ، (٣ ، $\frac{٣}{٢}$)

③ ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}-٩}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

∴ ق′(س) = $\frac{\text{س}(٢\text{س}) - (\text{س}^{٢}-٩)(١)}{\text{س}^{٢}}$

∴ ق′(س) = $\frac{\text{س}^{٢}+٩}{\text{س}^{٢}}$ = ١ + $\frac{٩}{\text{س}^{٢}}$ ، س ≠ ٠

المنحنى مقعر لأعلى في]٠ ، ∞[

ومقعر لأسفل في]-∞ ، ٠[

وليس للمنحنى نقط انعطاف

④ ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}-١}$

∴ ق′(س) = $\frac{\text{س}^{٢}-٢\text{س}}{(\text{س}-١)^{٢}}$

∴ ق″(س) = $\frac{(\text{س}-١)^{٢}(٢\text{س}-٢) - (\text{س}^{٢}-٢\text{س})(٢(\text{س}-١))}{(\text{س}-١)^{٤}}$

∴ ق″(س) = $\frac{٢\text{س}^{٢}-٤\text{س}+٢ - ٢\text{س}^{٢}+٤\text{س}}{(\text{س}-١)^{٣}}$

∴ ق″(س) = $\frac{٢}{(\text{س}-١)^{٣}}$

∵ ق″(س) غير معرفة عند س - ١ = ٠

∴ س = ١ ∉ المجال

المنحنى مقعر لأسفل في]-∞ ، ١[

ومقعر لأعلى في]١ ، ∞[

ولا يوجد للمنحنى نقط انعطاف

المنحنى مقعر لأعلى في]-∞ ، ٠[∪]٠ ، ∞[

ومقعر لأسفل في]٠ ، ∞[

وله نقطة انعطاف هي (-١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (١ ، $\frac{١}{٢}$)

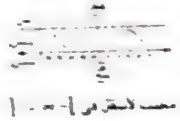
⑤ ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢}-١}$ ، ق(س) = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$

∵ ق(٠) غير معرفة

∴ المماس رأسي عند س = ٠

∴ ق′(س) = $\frac{٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}$ = $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}$

∵ ق′(س) غير معرفة عند س = ٠



المنحنى مقعر لأسفل في]-∞ ، ٠[

ومقعر لأعلى في]٠ ، ∞[

نقطة الانعطاف هي (٠ ، ٠)

المنحنى مقعر لأعلى في]-∞ ، ١[

ومقعر لأسفل في]١ ، ∞[

وليس للمنحنى نقط انعطاف

⑥ ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}-١}$

∴ ق′(س) = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٢}}}$

∴ ق″(س) = $\frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٥}}}$

∵ ق″(س) غير معرفة عند س = ١

∴ المماس رأسي عند س = ١

∴ ق″(س) = $\frac{-٢}{٩\sqrt{(\text{س}-١)^{٥}}}$

∴ س غير معرفة عند س = ٢

المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، ٢[

ومحدب لأعلى في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، ٠)

(١٠) د(س) = |س² - ١|

= { -س² + ١ ، س < ١ ؛ س² - ١ ، س ≥ ١ }

∴ د(١) = نهـا (س ← ١) (د(س) - د(١)) / (س - ١) = صفر

د'(١⁺) = نهـا (س ← ١⁺) (د(س) - د(١)) / (س - ١) = صفر

∴ د'(١) غير موجودة.

∴ د'(س) = { -٢س ، س < ١ ؛ ٢س ، س > ١ }

د''(س) = { -٢ ، س < ١ ؛ ٢ ، س > ١ }

• عند س < ١ د''(س) = ٠ ∴ -٦س = ٠

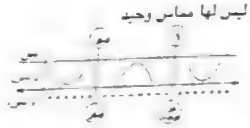
∴ س = ٠ لها مماس وحيد

• عند س > ١ د''(س) = ٠ ∴ ٦س = ٠

∴ س = ٠ لا تحقق

∴ د''(س) غير موجودة عند س = ١

∴ ليس لها مماس وحيد



المنحنى محدب لأعلى في]٠ ، ١[

المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، ٠[،]١ ، ∞[

وله نقطة انقلاب عند (٠ ، ١)

٣

(١) (-) (٢) (-) (٣) (-) (٤) (-) (٥) (-)

(٦) (-) (٧) (-) (٨) (-) (٩) (-) (١٠) (-)

(١١) (-) (١٢) (-) (١٣) (-) (١٤) (-) (١٥) (-)

(١٦) (-) (١٧) (-) (١٨) (-) (١٩) (-) (٢٠) (-)

(٢١) (-) (٢٢) (-) (٢٣) (-) (٢٤) (-) (٢٥) (-)

(٢٦) (-)

٤

د(س) = أس³ + ب س²

النقطة (١ ، ١٢) على المنحنى

∴ د(١) = ١٢ ∴ أ + ب = ١٢ (١)

د'(س) = ٣أس² + ٢ب س

د''(س) = ٦أس + ٢ب

عند س = ١ د''(س) = ٠

صفر = ٦أ + ٢ب (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) أ = -٦ ، ب = ١٨

٥

ص = س³ + أس² + ب س

النقطة (٣ ، -٩) تقع على المنحنى ∴ د(٣) = -٩

-٩ = ٣³ + أ(٣)² + ب(٣)

٢٧ + ٩أ + ٣ب = -٩ (١)

ص' = ٣س² + ٢أس + ب

ص'' = ٦س + ٢أ

عند س = ٣ ، ص'' = ٠ ∴ عند س = ٣

٠ = ٦ × ٣ + ٢أ

٢أ = -١٨ ∴ أ = -٩

بالتعويض في (١) ∴ ب = ١٥

٦

د(س) = ٢س + ما س

د'(س) = ٢ + ما س

د''(س) = ٠ + ما س

بوضع د''(س) = ٠ منها ما س = ٠

∴ س = صفر

المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، ٠[

ومحدب لأعلى في]٠ ، ∞[

له نقطة انقلاب هي (٠ ، ٠)

٧

د(س) = ١ / س

د'(س) = (١ × -١ / س²) / (١ / س)²

= -١ / س²

د''(س) = (-١ × -٢ / س³) / (١ / س²)²

= ٢ / س

∴ د''(س) = ٠ فإن س = صفر

نقطة الانقلاب هي (٠ ، ٠)

الميل عند (٠ ، ٠) د'(٠) = ١

∴ قياس الزاوية التي يصنعها المماس = ظا⁻¹(١) = π/٤

٨

د(س) = س (س - ٣)²

∴ د(س) = س³ - ٦س² + ٩س

∴ د'(س) = ٣س² - ١٢س + ٩

∴ د''(س) = ٦س - ١٢

∴ د''(س) = ٠ عند س = ٢

∴ عند س = ٢ توجد نقطة انقلاب

بوضوح د(س)

∴ ٣س² - ١٢س + ٩

∴ س² - ٤س + ٣

∴ د'(٢) = ٢ × ٢ - ٤

∴ عند س = ٢ قيمة صغرى نسبية

∴ د'(١) = ١ > ٠

∴ عند س = ١ قيمة عظمى نسبية

∴ س² - ٤س + ٣ = ٠

∴ (س - ١)(س - ٣) = ٠

∴ س = ١ ، س = ٣

∴ الاحداثي السيني لنقطة الانقلاب

٩

د(س) = ٢أس + ب د''(س) = ٢أ

بوضوح د''(س) = ٠ فإن س = -ب/٢أ

عند س = -ب/٢أ نقطة حرجة ∴ د'(-ب/٢أ) = ٠

∴ منحنى د له قيمة عظمى مطلقة عند س = -ب/٢أ

د''(س) قيمة ثابتة سالبة

∴ أ تساوي صفر لجميع قيم س

∴ أ توجد نقطة انقلاب للمنحنى

١٠

ص = أس² + ب س² + جـ س + ء

ص' = ٣أس² + ٢ب س + جـ

ص'' = ٦أس + ٢ب

∴ المنحنى له نقطة انقلاب عند (٠ ، ٠)

∴ ص'' = ٠ عند س = ٠ ∴ ٢ب = ٠ ∴ ب = ٠

• ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤)

∴ ص = ٤ عندما س = ٠

∴ ٤ = ٠ + ٠ + ٠ + ء ∴ ء = ٤

∴ ص = أس³ + جـ س + ٤

• ص' = ٣أس² + جـ

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠)

∴ ص = ٠ عند س = ٢

∴ ٠ = ٨أ + ٢جـ + ء

∴ ٤أ + جـ = -٢ (١)

∵ المنحنى يمس محور السينات في (٢ ، ٠)

∴ ص' = ٠ عند س = ٢ ∴ ١٢أ + جـ = ٠ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ أ = ١/٤ ، جـ = -٣

١١

ص = أس³ + ب س² + جـ س + ء

ص' = ٣أس² + ٢ب س + جـ

ص'' = ٦أس + ٢ب

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

∴ ص = ٢ عندما س = ٠

∴ ٢ = ٠ + ٠ + ٠ + ء ∴ ء = ٢

• ∵ له مماس أفقي عند س = ١

∴ ص' = ٠ عندما س = ١

∴ ٠ = ٣أ + ٢ب + جـ

∴ ٣أ + ٢ب + جـ = ٠ (١)

• ∵ النقطة (٢ ، ٤) هي نقطة انقلاب

∴ ص'' = ٠ عندما س = ٢

∴ ٠ = ١٢أ + ٢ب

∴ ٦أ + ب = ٠ (٢)

• ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

∴ ص = ٤ عندما س = ٢

∴ ٤ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ٢

∴ ٤أ + ٢ب + جـ = ١ (٣)

• بحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣)

∴ أ = ١ ، ب = -٦ ، جـ = ٩ ، ء = ٢

١٢

د(س) = أس³ + ب س² + جـ س + ء

د'(س) = ٣أس² + ٢ب س + جـ

د''(س) = ٦أس + ٢ب

∵ المنحنى له نقطة انقلاب عند (١ ، ٢)

∴ د''(١) = صفر ∴ ٦أ + ٢ب = ٠

∴ ب = -٣أ (١)

• ∵ المنحنى له قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٤)

∴ د'(٢) = ٤ ∴ ١٢أ + ٤ب + جـ = ٠

ومن (١) : ∴ ١٢أ - ١٢أ + جـ = ٠

∴ جـ = ٠ (٢)

• ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ د(١) = ٢ ∴ أ + ب + جـ + ء = ٢

ومن (١) ، (٢) : ∴ أ - ٣أ + ء = ٢

∴ -٢أ + ء = ٢ (٣)

• ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

∴ د(٢) = ٤ ∴ ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ء = ٤

ومن (١) ، (٢) : ∴ ٨أ - ١٢أ + ٠ + ء = ٤

∴ -٤أ + ء = ٤ (٤)

وبحل المعادلتين (٣) ، (٤) : ∴ أ = -١ ، ء = ٠

∴ ب = ٣

∴ معادلة المنحنى هي د(س) = -س³ + ٣س²

١٣

د هي دالة من الدرجة الثالثة

∴ د(س) = أس³ + ب س² + جـ س + ء

حيث أ ، ب ، جـ ، ء مقادير ثابتة

د'(س) = ٣أس² + ٢ب س + جـ

د''(س) = ٦أس + ٢ب

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠) ∴ د(١) = ٠

∴ ٠ = أ + ب + جـ + ء (١)

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ١) ∴ د(٢) = ١

∴ ١ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ء (٢)

∵ ميل المماس عند النقطة (١ ، ٢) = ٣/٢

∴ ص' = ٣/٢ عند س = ٢

٣/٢ = ١٢أ + ٤ب + جـ (٣)

∵ (٢ ، ١) نقطة انقلاب ∴ ص'' = ٠ عند س = ٢

٠ = ١٢أ + ٢ب (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) نتتج أن

أ = ٥/٢ ، ب = -١٥ ، جـ = ٣٧/٢ ، ء = -١٦

معادلة المنحنى :

د(س) = ٥/٢ س³ - ١٥س² + ٣٧/٢ س - ١٦

١٤

د(س) = أس³ + ب س² + ٩س + ١

د'(س) = ٣أس² + ٢ب س + ٩

د''(س) = ٦أس + ٢ب

∴ د''(س) = ٠ عند س = ١ ، س = ٣

∴ د'(١) = ٣أ + ٢ب + ٩ = ٠

٣أ + ٢ب = -٩ (١)

∴ د'(٣) = ٢٧أ + ٦ب + ٩ = ٠

٩أ + ٢ب = -٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : أ = ١ ، ب = -٦

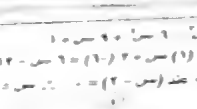
∴ معادلة المنحنى هي

د(س) = س³ - ٦س² + ٩س + ١

د'(س) = ٣س² - ١٢س + ٩

د''(س) = ٦س - ١٢

∴ د''(س) = ٠ عند (س - ٢) = ٠ ∴ س = ٢



المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ٢[

ومحدب لأسفل في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب هي (٢ ، ٣)

١٥

د(س) = { ٢س² - ٢أس + ب ، س ≤ ١ ؛ ٢س - س² ، س > ١ }

∵ الدالة قابلة للاشتقاق ∴ الدالة متصلة

∴ د(١⁻) = د(١⁺) = د(١)

٢ + ٢أ + ب = ٣ - ١ ∴ ٢أ = -ب

د'(س) = { ٤س - ٢أ ، س ≤ ١ ؛ ٢ - ٢س ، س > ١ }

∵ د'(١⁻) = د'(١⁺)

٤ - ٢أ = ٢ - ٢ ∴ ٢أ = ٢ ∴ ب = -٢

د'(١⁺) = نهـا (س ← ١⁺) (د'(س) - د'(١)) / (س - ١)

= نهـا (س ← ١⁺) (٢ - ٢س - (٤ - ٢أ)) / (س - ١)

= نهـا (س ← ١⁺) (٢ - ٢س - ٢ + ٢أ) / (س - ١) = ٢أ

د'(١⁻) = نهـا (س ← ١⁻) (د'(س) - د'(١)) / (س - ١)

= نهـا (س ← ١⁻) (٤س - ٢أ - ٤ + ٢أ) / (س - ١)

= نهـا (س ← ١⁻) ٤(س - ١) / (س - ١) = ٤

∴ د'(١) غير موجودة.

∴ د'(س) = { ٤ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ -٢ ، س > ١ }

المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ١[

محدب لأسفل في]١ ، ∞[

الدالة لها مماس عند س = ١

∴ لها نقطة انقلاب (١ ، ٢)

٢١

① د(س) = { (س + ٣)² ، س ≤ ١ ؛ ٣س² ، س > ١ }

∴ د(١) = نهـا_{س ← ١} (د(س) − د(١)) / (س − ١) = ٤

∴ د'(١)⁺ = نهـا_{س ← ١⁺} ٣(س − ١)² / (س − ١) = ٠

∴ د'(١) ≠ د'(١⁺)

∴ د'(١) غير موجودة.

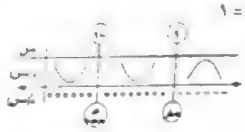
∴ د'(س) = { ٢(س + ٣) ، س ≤ ١ ؛ ٦س − ٣س² ، س > ١ }

∴ لا توجد مماس عند س = ١

∴ د'(س) = { ٢ ، س < ١ ؛ ٦ − ٦س ، س > ١ }

∴ د'(س) = ٠ ∴ ٦ − ٦س = ٠

س = ١



المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، ١[[٠ ، ١[

ومحدب لأعلى في]١ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (١ ، ٢)

ميل المماس عندها = ٦(١) − ٣(١)² = ٣

معادلته ص − ٢ = ٣(س − ١)

٣س − ص − ١ = ٠

② د(س) = { س² − ٤ ، س < ٢ ؛ ٣س − ٢ ، س ≥ ٢ }

∴ د(٢⁻) = نهـا_{س ← ٢⁻} (د(س) − د(٢)) / (س − ٢) = ٠

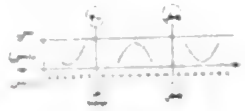
∴ د(٢⁺) = نهـا_{س ← ٢⁺} (د(س) − د(٢)) / (س − ٢) = ٣

∴ د(٢⁻) ≠ د(٢⁺) ليس له مماس عند س = ٢

∴ د'(س) = { ٢س ، س < ٢ ؛ ٣ ، س > ٢ }

∴ د'(س) = { ٢ ، س < ٢ ؛ ٦س ، س > ٢ }

∴ د'(س) = ٠ ∴ ٦س = ٠ منها س = ٠



المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، ٠[[٠ ، ٢[

ومحدب لأعلى في]٢ ، ∞[

يوجد نقطة انقلاب (٠ ، ٠)

ويوجد مماس عند هذه النقطة ميله د'(٠) = ٠

معادلة المماس هي (ص − ٠) / (س − ٠) = ٠/١

منها ٢س − ص − ٠ = ٠

③ د(س) = { س² − ٣س ، س < ٠ ؛ ٤ − س² ، س ≥ ٠ }

∴ د(٠⁻) = نهـا_{س ← ٠⁻} (د(س) − د(٠)) / (س − ٠) = −٣

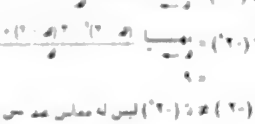
∴ د(٠⁺) = نهـا_{س ← ٠⁺} (د(س) − د(٠)) / (س − ٠) = ٠

∴ د(٠⁻) ≠ د(٠⁺) ليس له مماس عند س = ٠

∴ د'(س) = { ٢س − ٣ ، س < ٠ ؛ −٢س ، س > ٠ }

∴ د'(س) = { ٢س − ٣ ، س < ٠ ؛ −٢س ، س > ٠ }

∴ د'(س) = ٠ ∴ ٢س − ٣ = ٠ منها س = ٣/٢



المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، ٠[[٠ ، ٣/٢[

ومحدب لأعلى في]٣/٢ ، ∞[

يوجد نقطة انقلاب (٠ ، ٠)

ويوجد مماس عند هذه النقطة ميله د'(٠) = ٠

معادلة المماس هي (ص − ٠) / (س − ٠) = ٠/١

منها ٢س − ص − ٠ = ٠

∴ د'(س) = { ٢س − ٣ ، س < ٠ ؛ ٦س ، س > ٠ }

∴ د'(س) = { ٢ ، س < ٠ ؛ ٦ ، س > ٠ }

∴ د'(س) = ٠ ∴ ٦س = ٠ منها س = ٠

المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ٠[[٠ ، ∞[

لا يوجد نقطة انقلاب

٢٢

① (−) ② (+) ③ (−)

④ (−) ⑤ (+) ⑥ (−)

٢٣

① (+) ② (−) ③ (+)

④ (+) ⑤ (+) ⑥ (−)

إرشادات لحل رقم ٢٤

①

من الرسم نلاحظ أن عدد النقط التي ينقطع منها منحنى الدالة مع أي مستقيم لا يتعدى الثلاث نقاط

② ∵ منحنى الدالة يكون مقعرا لأسفل أي أن محدب لأعلى

∴ د''(س) = ٢(٢ − ٢) س + ٢

∴ د''(س) = ٢(٢ − ٢)

ووضع د''(س) <

∴ ٢ − ٢ < ٠ ∴ ٢ > ٢

③ ∴ د(س) = { ٢س ، س ≤ ٠ ؛ −٢س ، س > ٠ }

∴ د'(س) = { ٢ ، س < ٠ ؛ −٢ ، س > ٠ }

∴ د''(س) = { ٠ ، س < ٠ ؛ ٠ ، س > ٠ }

المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ٠[[٠ ، ∞[

لا يوجد نقطة انقلاب

④ ∵ د(س) > ٠ لكل س ∈ ح

∴ د(س) > ٠ ، د(س) ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ د(س) = |س| ، د'(س) = { −١ ، س < ٠ ؛ ١ ، س > ٠ }

∴ د''(س) = { ٠ ، س < ٠ ؛ ٠ ، س > ٠ }

∴ د''(س) = ٠ ، د(س) ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل

⑤ د(س) = |س − ٢| ، د'(س) = { −١ ، س < ٢ ؛ ١ ، س > ٢ }

∴ د''(س) = { ٠ ، س < ٢ ؛ ٠ ، س > ٢ }

∴ د''(س) = ٠ ، د(س) ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل

⑥ د(س) = |س|

ليس لها نقط انقلاب

لا يمكن محدب المنحنى

حول أي نقطة على س

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل

⑦ د(س) = |س − ٢| + |س + ٢|

∴ د(س) = { −(س − ٢) − (س + ٢) ، س ≤ −٢ ؛ (س − ٢) − (س + ٢) ، −٢ < س < ٢ ؛ (س − ٢) + (س + ٢) ، س ≥ ٢ }

∴ د(س) = { −٢س ، س ≤ −٢ ؛ −٤ ، −٢ < س < ٢ ؛ ٢س ، س ≥ ٢ }

∴ د'(س) = { −٢ ، س < −٢ ؛ ٠ ، −٢ < س < ٢ ؛ ٢ ، س > ٢ }

∴ د''(س) = { ٠ ، س < −٢ ؛ ٠ ، −٢ < س < ٢ ؛ ٠ ، س > ٢ }

∴ د''(س) = ٠ ، د(س) ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل

⑧ د(س) = |س − ٢| + |س + ٢|

∴ د(س) > ٠ لكل س ∈ ح

∴ د(س) ≠ ٠ ، د(س) > ٠ لكل س ∈ ح

∴ د(س) = |س − ٢| + |س + ٢|

∴ د'(س) = { −١ ، س < −٢ ؛ ١ ، س > −٢ }

∴ د''(س) = { ٠ ، س < −٢ ؛ ٠ ، س > −٢ }

∴ د''(س) = ٠ ، د(س) ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل

٢٥

① ∵ د(س) = س² + ٢س + ٣ ، د(−١) = ٠

∴ ٠ = (−١)² + ٢(−١) + ٣ ∴ ٠ = ٢

∴ د(س) = س² + ٢س + ٣

∴ د'(س) = ٢س + ٢

∴ د''(س) = ٢ > ٠

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل

② ∵ د(س) = س² − ٢س − ٣ ، د(٣) = ٠

∴ ٠ = ٣² − ٢(٣) − ٣ ∴ ٠ = ٠

∴ د(س) = س² − ٢س − ٣

∴ د'(س) = ٢س − ٢

∴ د''(س) = ٢ > ٠

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل

③ ∵ د(س) = −س² + ٢س + ٣ ، د(٣) = ٠

∴ ٠ = −٣² + ٢(٣) + ٣ ∴ ٠ = ٠

∴ د(س) = −س² + ٢س + ٣

∴ د'(س) = −٢س + ٢

∴ د''(س) = −٢ < ٠

∴ منحنى الدالة محدب لأعلى

④ ∵ د(س) = −س² − ٢س + ٣ ، د(−٣) = ٠

∴ ٠ = −(−٣)² − ٢(−٣) + ٣ ∴ ٠ = ٠

∴ د(س) = −س² − ٢س + ٣

∴ د'(س) = −٢س − ٢

∴ د''(س) = −٢ < ٠

∴ منحنى الدالة محدب لأعلى

٢٦

① ∵ د(س) = س² − ٤س + ٣ ∴ د'(س) = ٢س − ٤

∴ د''(س) = ٢

• بوضع د'(س) = ٠ ∴ س = ٢

∵ د''(س) = ٢ ≠ ٠

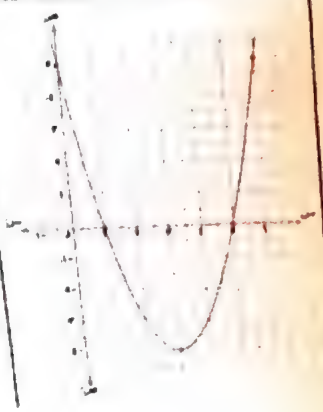
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د(س) = ٠ ∴ س = ١ ، ٣

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د(٠) = ٣

س	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	٣	٠	−١	٠	٣



② ∵ د(س) = ٢س − ٩ ∴ د'(س) = ٢

∴ د''(س) = ٠

• بوضع د'(س) = ٠ ∴ س = ٠

∵ د''(س) = ٠ ≠ ٠

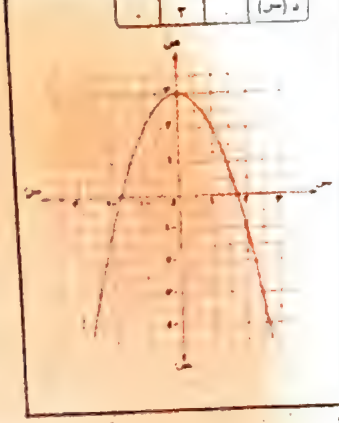
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د(س) = ٠ ∴ س = ±٣

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د(٠) = −٩

س	٠	±٣
د(س)	−٩	٠



الوحدة الخامسة 1.5

أولا مسائل على رسم المنحنيات

١

① د(س) = ٢ − س² ∴ د'(س) = −٢س

∴ د''(س) = −٢

• بوضع د'(س) = ٠ ∴ س = ٠

∵ د''(س) = −٢ ≠ ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د(س) = ٠ ∴ س = ±√٢

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د(٠) = ٢

س	٠	−√٢
د(س)	٢	٠

② ∵ د(س) = س² − ٩ ∴ د'(س) = ٢س

∴ د''(س) = ٢

• بوضع د'(س) = ٠ ∴ س = ٠

∵ د''(س) = ٢ ≠ ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د(س) = ٠ ∴ س = ±٣

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د(٠) = −٩

س	٠	±٣
د(س)	−٩	٠

③ د(س) = س(س − ٢)²

= س³ − ٤س² + ٤س

∴ د'(س) = ٣س² − ٨س + ٤

∴ د''(س) = ٦س − ٨

• بوضع د'(س) = ٠ ∴ س = ٢/٣ ، ٢

∵ د''(س) = ٠ ، ٤

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د(س) = ٠ ∴ س = ٠ ، ٢

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د(٠) = ٠

س	٠	٢/٣	٢
د(س)	٠	٤/٢٧	٠

• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = ١

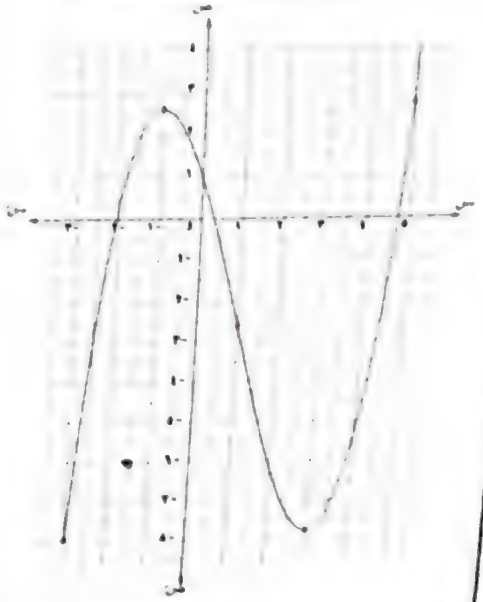
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ١

• نعين نقط مساعدة : د (−٣) = −٨

، د (٥) = $\frac{٨}{٣}$

س	−٣	−١	١	٣	٥
د (س)	−٨	$\frac{٨}{٣}$	$\frac{-٨}{٣}$	−٨	$\frac{٨}{٣}$



• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = −١ ، ١

• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

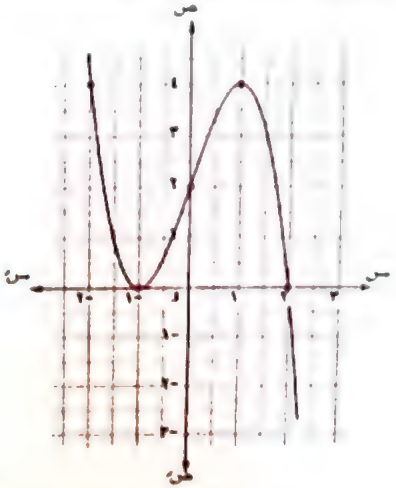
∴ د (س) = ٠ ∴ س = ٢ ، −١

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

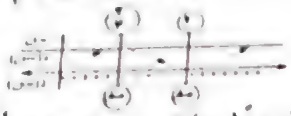
نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

• نعين نقطة مساعدة : د (−٢) = ٤

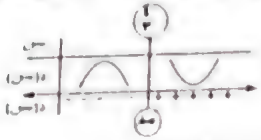
س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	٤	٠	٢	٤	٠



• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = ٢ ، ٠



• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = $\frac{٤}{٣}$

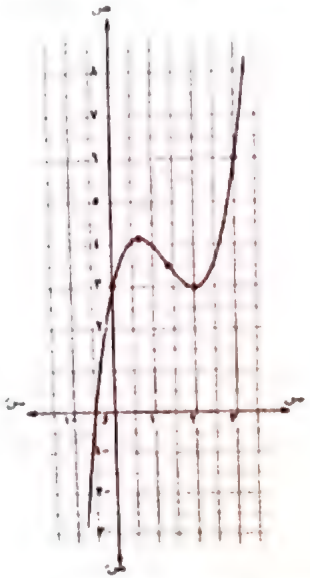


• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

س = ٠ ∴ د (٠) = ٣

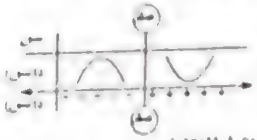
• نعين نقطة مساعدة : د (٣) = ٦

س	٠	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{٤}{٣}$	٢	٣
د (س)	٣	$\frac{١١٣}{٢٧}$	$\frac{٩٧}{٢٧}$	٣	٦



• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = ٠ ، ٢

• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = ٠



• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

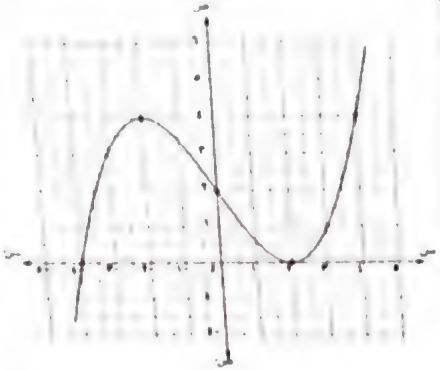
نضع د (س) = ٠ ∴ س = −٤ ، ٢

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

• نعين نقطة مساعدة : د (٤) = ٤

س	−٤	−٢	٠	٢	٤
د (س)	٠	٤	٢	٠	٤



(١٢) د (س) = |س| |س| − ١|

د (س) = { س² − ٢ |س| ، س ≤ −١ ، س² − ٢ |س| ، س ≥ ١ }

∴ د′(١) ≠ د′(−١)

∴ د′(س) = { ٢س − ٢ ، س > ١ ، غير موجودة ، س = ١ ، ٢س − ٢ ، س < ١ }

د″(س) = { ٢ ، س > ١ ، غير موجودة ، س = ١ ، ٢ ، س < ١ }

• بوضع د′(س) = ٠

(أولاً) س > ١ ∴ س = ٢ مرفوض

• د″(س) ≠ ٠ لجميع قيم س

• نعين نقط مساعدة د ( ) = ٠ ، د (٥) = ٥

س	٠	١	٢	١	٥
د (س)	٠	٠	٤	٠	٥

(١٣) د (س) = | س² − ٢ س ، س > ٠ ، −س² + ٢ س ، س ≤ ٠ |

∴ د′(٠) ≠ د′( ) ∴ د ( ) غير موجودة

∴ د′(س) = { ٢س − ٢ ، س > ٠ ، غير موجودة ، س = ٠ ، −٢س + ٢ ، س < ٠ }

د″(س) = { ٢ ، س > ٠ ، غير موجودة ، س = ٠ ، −٢ ، س < ٠ }

• بوضع د′(س) = ٠

(أولاً) عند س > ٠ ∴ س = ٢

(ثانياً) س ≤ ٠ لا يوجد

• بوضع د″(س) = ٠

عند س > ٠ ∴ س = ١

عند س ≤ ٠ لا يوجد

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د (س) = ٠ ، عند س > ٠ ∴ س = ٢

، عند س ≤ ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٠

• نعين نقطة مساعدة د (١) = ٢

٤

د (س) = س³ − ٣ س² + ٤

∴ د′(س) = ٣ س² − ٦ س

، د″(س) = ٦ س − ٦

∴ توجد نقطة انقلاب (١ ، ٢)

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د (س) = ٠ ∴ س = −١ ، ٢

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

• نعين نقطة مساعدة : د (−٢) = −٤

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	−٤	٠	٢	٤	٠

٥

ص = س³ + س² + س

∴ ص′ = ٣ س² + ٢ س + ١

، ص″ = ٦ س + ٢

∴ توجد قيمة عظمى محلية د (−١) = ٤

، قيمة صغرى محلية د (٢) = ٠

• بوضع د″(س) = ٠ ∴ س = −١

توجد نقطة انقلاب هي (−١ ، ٢)

• نعين نقط مساعدة : د (−١) = ٠ ، د (٢) = ٤

س	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	٠	٤	٢	٠	٤

١

ص = س² − ٢ س + ١

∴ ص′ = ٢ س − ٢

، ص″ = ٢

• بوضع ص′ = ٠ ∴ س = ١

∴ د متزايدة في | ١ ، ∞ | ، متناقصة في | −∞ ، ١ |

• بوضع ص″ = ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

• نعين نقط مساعدة د ( ) ، د (٢) = ١

٢

د (س) = (س + ١) (س − ٢)

∴ د (س) = (س + ١) (س − ٢)

د (س) = س² − س − ٢

= ٢ س² − ٢

، د′(س) = ٢ س − ١ بوضع د′(س) = ٠

∴ س = ١/٢

∴ توجد قيمة عظمى محلية د (١) = صفر

كما توجد قيمة صغرى محلية

، د (١) = ١

• نعين نقط مساعدة د (٢) = ٢ ، د (١) = ١

س	٠	١	٢
د (س)	١	٠	٢

٣

قيس أيها قيمة هي أكبر ما يمكن

∴ لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية

• بوضع ص′ = ٠ ∴ س = ١/٣

∴ (١/٣ ، ٧/٢٧) نقطة انقلاب

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د (س) = ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ ص = ٠

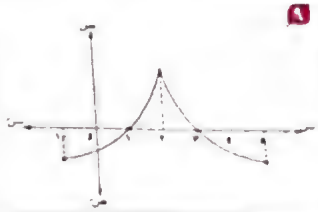
• نعين نقطة مساعدة : د (−١) = −١ ، د (١) = ٣

س	−١	−١/٣	٠	١
ص	−١	−٧/٢٧	٠	٣

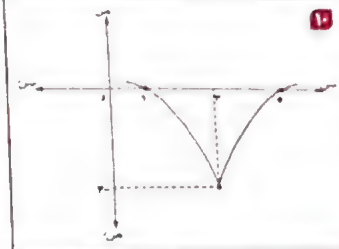
٧

٨

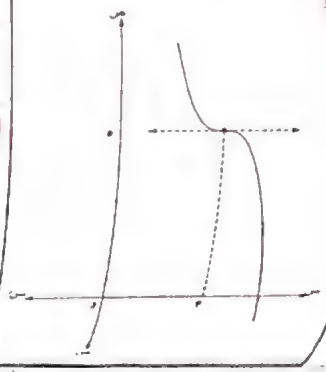
٩



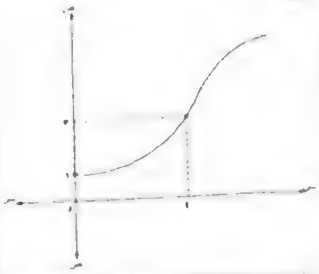
١٠



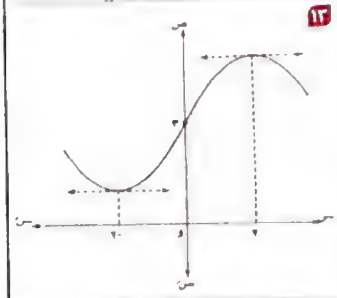
١١



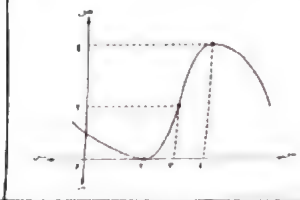
١٢



١٣



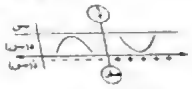
١٤



∴ معادلة المنحنى هي : ص = ٦ س^{٢} − ٢ س^{٣} + ٦

∴ ص$'$ = ١٢ س − ٦ س^{٢} ∴ ص$''$ = ١٢ − ١٢ س

، بوضع ص$'$ = ٠ ∴ س = $\frac{١}{٢}$ ومنها ص = $\frac{١١}{٢}$

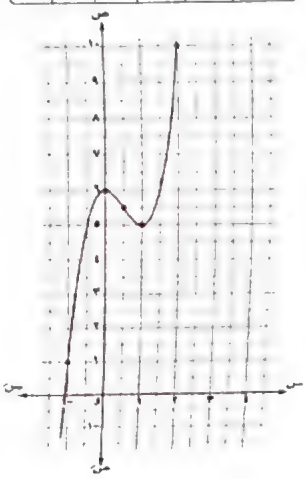


لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

∴ ص = ٦

• نعين نقط مساعدة د (−١) = ١ ، د (٢) = ١٠

س	−١	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢
د (س)	١	٦	$\frac{١١}{٢}$	٥	١٠



∴ معادلة المنحنى هي : ص = ٦ س^{٢} − ٢ س^{٣} + ٦

∴ ص$'$ = ١٢ س − ٦ س^{٢} ∴ ص$''$ = ١٢ − ١٢ س

، بوضع ص$''$ = ٠ ∴ س = ١

∴ (١ ، ٢) نقطة انقلاب

∴ المنحنى يمر بالنقطة (−١ ، ١١)

∴ ١١ = −١ + أ − ب ∴ أ − ب = ١٢ (١)

، ∵ توجد نقطة انقلاب عند س = −١

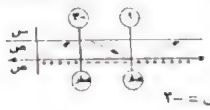
∴ صفر = ٦ (−١) + ٢ أ ∴ أ = ٣ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ب = −٩

∴ معادلة المنحنى : ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} − ٩ س

∴ ص$'$ = ٣ س^{٢} + ٦ س − ٩

، بوضع ص$'$ = ٠ ∴ س = −٣ أ ، ١



∴ عند س = −٣

قيمة عظمى محلية

∴ النقطة (−٣ ، ٢٧) نقطة قيمة عظمى محلية

، عند س = ١ قيمة صغرى محلية

∴ النقطة (١ ، −٥) نقطة قيمة صغرى محلية

، ص$''$ = ٦ س + ٦

، بوضع ص$''$ = ٠ ∴ س = −١

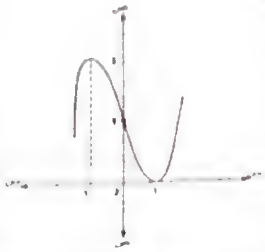
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ ص = ٠

• نعين نقط مساعدة : عند س = ٢ فإن : ص = ٢

، عند س = −٥ فإن : ص = −٥

١٥



١٦

ص = أ س^{٢} + ب س

∴ ص$'$ = ٢ أ س^{٢} + ٢ ب س

∴ ص$''$ = ٦ أ س + ٢ ب

، ∵ (١ ، ٢) ∈ المنحنى ∴ ٢ = أ + ب (١)

، ∵ (١ ، ٢) نقطة انقلاب ∴ ٠ = ٦ أ + ٢ ب (٢)

من (١) ، (٢) : أ = $\frac{٣}{٢}$ ، ب = −$\frac{٩}{٢}$

∴ ص = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٩}{٢}$ س^{٣}

، ص$''$ = −$\frac{٩}{٢}$ س^{٢} + ٩ س

، ص$''$ = −٩ س + ٩

بوضع ص$''$ = ٠ ∴ س = ١ ، س = ٢

بوضع د$'$ (س) = ٠ ∴ س = ١

∴ (١ ، ٢) نقطة انقلاب

١٧

ص = أ س^{٢} + ب س^{٣} + جـ س + ٤

∴ ص$'$ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

∴ ص$''$ = ٦ أ س + ٢ ب

، المنحنى يمر بالنقطة (−١ ، ٦) ، (١ ، ٥)

∴ ٦ = ٤ + ٠ + ٠ + ٤ ∴ ٦ = ٤

، ٥ = أ + ب + جـ + ٦ ∴ أ + ب + جـ = −١ (١)

∵ يوجد نقطة حرجة عند (−١ ، ٦) ∴ ص$'$ = ٠

∴ ٠ = ٣ أ (−١)^{٢} + ٢ ب (−١) + جـ ∴ جـ = ٠

يوجد نقطة حرجة عند (١ ، ٥)

∴ ٠ = ٣ أ (١)^{٢} + ٢ ب (١) + جـ

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع ص = ٠ ومنها س = ٢ ، صفر

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

∴ ص = ٤

نعين نقطة مساعدة د (١) = ١٠

س	١	٠	١	٢	٣
ص	٩	٤	٢	٩	٠

١٨

د (س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ٤

∴ د$'$ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب

، د$''$ (س) = ٦ س + ٢ أ

، ∵ د$'$ (س) = ٠ عند س = ٢

∴ ٠ = ٣ (٢)^{٢} + ٢ أ (٢) + ب

∴ ٤ أ + ب = −١٢ (١)

، د$''$ (س) = ٠ عند س = ١

∴ ٠ = ٦ (١) + ٢ أ ∴ أ = −٣ (٢)

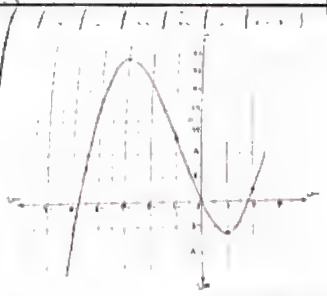
من (١) ، (٢) : فإن : ب = ٠

∴ د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٤

بوضع د$''$ (س) = ٠ ∴ ٣ س^{٢} − ٦ س = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٢

• توجد نقط مساعدة : د (−١) = ٠ ، د (٣) = ٤



٢٠

د (س) = { س + ١ ، س ≤ ١ ؛ (س − ٣)^{٢} − ٢ ، س ≥ ١ }

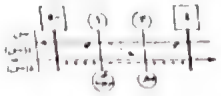
، ∵ د$'$ (١$^{-}$) ≠ د$'$ (١$^{+}$)

∴ د$'$ (س) = { ١ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ (س − ٣) ، س > ١ }

، د$''$ (س) = { ٠ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ ، س > ١ }

، د$'$ (س) = ٠ عند س < ١ لا تحقق

، عند س > ١ ∴ س = ٣

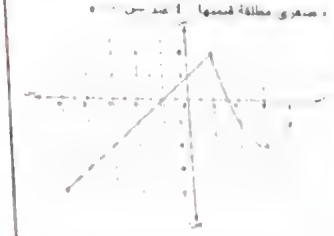


، ∵ د$''$ (٣) = موجبة (صغرى)

س	−٥	١	٣	٤
د (س)	−٤	٢	−٢	١

∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة قيمتها ٢ عند س = ١

، صغرى مطلقة قيمتها ١ عند س = ٠



ثالثًا مسائل على المنحنيات المرسومة

١

(ب) تمثل الدالة د (س) ، (جـ) تمثل الدالة د′ (س)
، (أ) تمثل الدالة د″ (س)

٢

① (جـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (ب) ⑤ (ب)

٣

① (ب) ② (أ)

٤

① د متزايدة في]-٣ ، ١[
، ومتناقصة في]-∞ ، -٣[،]١ ، ∞[
②]-∞ ، -١[

٥

① (ب) ② (د) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (جـ)

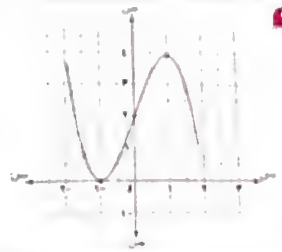
٦

① منحنى لأعلى في]-٢ ، ١[ومنحنى لأسفل في]١ ، ٥[
② لها نقطة انقلاب عند س = ١
(أ) د′ (١) سالبة ، د″ (١) موجبة
(ب) د′ (١) موجبة
د″ (١) سالبة

٧

① (ب) ② (ب) ③ (د) ④ (د)

٨



٩

١٠

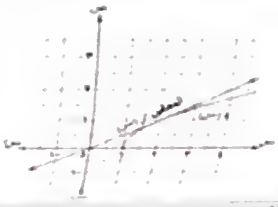
① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (جـ)
⑥ (ب) ⑦ (د) ⑧ أولًا (جـ) ثانيًا (د)
⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (جـ) ⑫ (د) ⑬ (ب)
⑭ (ب) ⑮ أولًا (جـ) ثانيًا (ب) ⑯ (أ)
⑰ (د) ⑱ (أ) ⑲ (ب)

١١

① (جـ) ② (جـ) ③ (د) ④ (د)

إرشادات لحل رقم ١١

① من الرسم نجد أن المماس دائمًا مرسوم أعلى منحنى الدالة ص = د (س) أي أن ص (س) ≤ د (س)



٥

نفرض أن الأعداد الثلاثة هي س ، ب ، جـ
∵ أكبرها جـ = ٢ س
∴ س + ب + ٢ س = ٣٦
∴ ب = ٣٦ − ٣ س
حاصل ضربهم
ص = س × ب × جـ = س × (٣٦ − ٣ س) × ٢ س
= ٧٢ س² − ٦ س³
∴ ص′ = ١٤٤ س − ١٨ س² = ١٨ س (٨ − س)
∴ ص″ = ١٤٤ − ٣٦ س
بوضع ص′ = ٠
∴ ١٨ س (٨ − س) = ٠
∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٨
(ص″)$_{س=٨}$ = −١٤٤
∴ ص لها قيمة صغرى عند س = ٨
الأعداد هي ٨ ، ١٢ ، ١٦

٦

نفرض أن الأعداد س ، ٣ س ، ع
مجموعها س + ٣ س + ع = ٢١
∴ ع = ٢١ − ٤ س
مجموع مربعاتها
ص = س² + (٣ س)² + (٢١ − ٤ س)²
∴ ص′ = ٢ س + ٦ (٢١ − ٤ س) × −٤
∴ ص′ = ٢٠ س − ٥٠٤ عند س = ٢٥٢/١٠
(ص″)$_{س=٢٥٢/١٠}$ = ٢٠ > ٠ (صغرى)
الأعداد هي ٥ ، ١٥ ، ١٠

٧

نفرض أن العددين س ، ص حيث س ، ص > ٠
∴ محيطه المستطيل = ٢ س + ٢ ص
∴ مجموعهما ص = س + ص = ٢ س
∴ ص = ٢ س − س
∴ ص′ = ٢ − ٢ س
بوضع ص′ = ٠
∴ س = ١ (مرفوض)
∴ ص″ = −٢ < ٠ ∴ ص لها قيمة صغرى
∴ العدد = ١

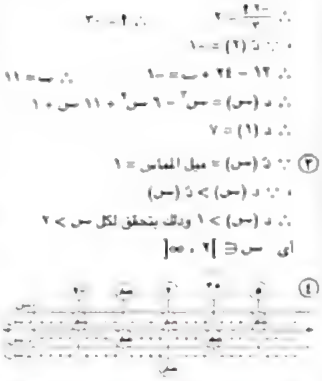
٨

نفرض أن بعدي المستطيل س ، ص
محيطه = (س + ص) × ٢ = ١٢٠
∴ ص = ٦٠ − س
مساحته م = س ص = س (٦٠ − س)
= ٦٠ س − س²
∴ م′ = ٦٠ − ٢ س ∴ م″ = −٢
نفرض أن م′ = ٠
∴ س = ٣٠
∴ م″ (٣٠) < ٠ ∴ م تحقق قيمة عظمى
∴ س = ٣٠
∴ أكبر مساحة م = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ متر²

② ∵ د (س) = ٣ س² + ٤ س + ب دالة من الدرجة الثانية الأحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى هي −٤/(٢ × ٣) = −٢/٣
ومن الرسم نجد أن الأحداثي السيني لرأس المنحنى يساوي ٢
∴ −٢/٣ = ٢ ∴ ب = −٢٠
، ∵ د (٢) = ١٠
∴ ١٢ − ٢٤ + ب = ١٠ ∴ ب = ١١
∴ د (س) = س³ − ٦ س² + ١١ س + ١٠
∴ د (١) = ٧

③ ∵ د′ (س) = ميل المماس = ١
، ∵ د (س) > د′ (س)
∴ د (س) > ١ وذلك يتحقق لكل س > ٢
أي س ∈]٢ ، ∞[

④



لاحظ أن د (س) ، د′ (س) ، د″ (س) لهم نفس الإشارة لكل س ∈]٥ ، ∞[

إجابات تمارين 14

١

نفرض أن أحد العددين هو س
∴ العدد الآخر هو ٣٠ − س
نفرض أن حاصل ضربهما ص = س (٣٠ − س)
= ٣٠ س − س²
∴ ص′ = ٣٠ − ٢ س
نفرض أن ص′ = ٠ ∴ س = ١٥
∴ ص″ = −٢ لجميع قيم س
∴ ص عند س = ١٥ لها قيمة عظمى
العددان هما ١٥ ، ٣٠ − ١٥ = ١٥

٢

نفرض أن العددين هما س ، ١٦ − س
∴ مجموع مربعيهما ص = س² + (١٦ − س)²
= ٢ س² − ٣٢ س + ٢٥٦
∴ ص′ = ٤ س − ٣٢ ∴ ص″ = ٤
بوضع ص′ = ٠ ∴ س = ٨
(ص″)$_{س=٨}$ = ٤ (موجبة)
∴ عند س = ٨ لها قيمة صغرى
∴ العددان هما ٨ ، ٨

٣

نفرض أن العددين هما س ، ٣٦/س
∴ مجموعهم ص = س + ٣٦/س = س + ٣٦ س⁻¹
∴ ص′ = ١ − ٣٦ س⁻² ∴ ص″ = ٧٢ س⁻³
∴ ص′ = ٠ عندما ١ − ٣٦ س⁻² = ٠
∴ س² = ٣٦ ∴ س = ±٦
عند س = ٦ ∴ ص″ > ٠ قيمة صغرى
عند س = −٦ ∴ ص″ < ٠ قيمة عظمى
∴ أصغر ما يمكن عند س = ٦
∴ العددان ٦ ، ٦

٤

نفرض أن العددين هما س ، ٥ − س
حيث س ≤ ٥ ∴ س ≤ ٥/٢ ∴ ص = س² + ٢ (٥ − س)²
∴ ص′ = ٢ س² + ٤ (٥ − س) (−١)
= ٢ س² + ٤ س − ٢٠
∴ ص′ = ٦ س − ٤
بوضع ص′ = صفر ∴ ٣ س² − ٥ س − ٢٠ = ٠

∴ (س − ٥) (٣ س + ٤) = ٠
∴ س = ٥/٣ ∴ ص″ (٥/٣) = ٢ > ٠
∴ عند س = ٥/٣ لها قيمة عظمى
∴ العددان هما ٥/٣ ، ٢٠/٣

٥

نفرض أن الأعداد الثلاثة هي س ، ب ، جـ
∵ أكبرها جـ = ٢ س
∴ س + ب + ٢ س = ٣٦
∴ ب = ٣٦ − ٣ س
حاصل ضربهم
ص = س × ب × جـ = س × (٣٦ − ٣ س) × ٢ س
= ٧٢ س² − ٦ س³
∴ ص′ = ١٤٤ س − ١٨ س² = ١٨ س (٨ − س)
∴ ص″ = ١٤٤ − ٣٦ س
بوضع ص′ = ٠
∴ ١٨ س (٨ − س) = ٠
∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٨
(ص″)$_{س=٨}$ = −١٤٤
∴ ص لها قيمة صغرى عند س = ٨
الأعداد هي ٨ ، ١٢ ، ١٦

٦

نفرض أن الأعداد س ، ٣ س ، ع
مجموعها س + ٣ س + ع = ٢١
∴ ع = ٢١ − ٤ س
مجموع مربعاتها
ص = س² + (٣ س)² + (٢١ − ٤ س)²
∴ ص′ = ٢ س + ٦ (٢١ − ٤ س) × −٤
∴ ص′ = ٢٠ س − ٥٠٤ عند س = ٢٥٢/١٠
(ص″)$_{س=٢٥٢/١٠}$ = ٢٠ > ٠ (صغرى)
الأعداد هي ٥ ، ١٥ ، ١٠

٧

نفرض أن العددين س ، ص حيث س ، ص > ٠
∴ محيطه المستطيل = ٢ س + ٢ ص
∴ مجموعهما ص = س + ص = ٢ س
∴ ص = ٢ س − س
∴ ص′ = ٢ − ٢ س
بوضع ص′ = ٠
∴ س = ١ (مرفوض)
∴ ص″ = −٢ < ٠ ∴ ص لها قيمة صغرى
∴ العدد = ١

٨

نفرض أن بعدي المستطيل س ، ص
محيطه = (س + ص) × ٢ = ١٢٠
∴ ص = ٦٠ − س
مساحته م = س ص = س (٦٠ − س)
= ٦٠ س − س²
∴ م′ = ٦٠ − ٢ س ∴ م″ = −٢
نفرض أن م′ = ٠
∴ س = ٣٠
∴ م″ (٣٠) < ٠ ∴ م تحقق قيمة عظمى
∴ س = ٣٠
∴ أكبر مساحة م = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ متر²

٩

نفرض أن بعدي المستطيل س ، ص
محيطه = ٢ (س + ص) = ل
∴ ص = ل/٢ − س
مساحته م = س ص = س (ل/٢ − س)
= ل/٢ س − س²
∴ م′ = ل/٢ − ٢ س ∴ م″ = −٢
عند م′ = ٠ ∴ س = ل/٤
∴ م″ (ل/٤) = −٢ < ٠ (عظمى)
أبعاد المستطيل هي ل/٤ ، ل/٤

١٠

نفرض أن نصف قطر دائرة القطاع = س
وطول القوس = ص
∴ المحيط = ٢ س + ص = ٢٠
∴ ص = ٢٠ − ٢ س
مساحته م = ½ س ص
∴ م = ½ س (٢٠ − ٢ س) ∴ م = ١٠ س − س²
∴ م′ = ١٠ − ٢ س ∴ م″ = −٢
∴ م′ = ٠ عند س = ٥
∴ م″ (٥) = −٢ < ٠ (عظمى)
∴ نصف قطر دائرته = ٥ سم

١١

نفرض أن نصف قطر دائرته س
وطول القوس = ص ومحيطه الثابت = ل
∴ ٢ س + ص = ل ∴ ص = ل − ٢ س
مساحته م = ½ س ص = ½ س (ل − ٢ س)
= ½ ل س − س²
∴ م′ = ½ ل − ٢ س ∴ م″ = −٢
∴ عند س = ل/٤ تحقق م قيمة عظمى
∴ م″ (ل/٤) = −٢ < ٠
∴ م″ (ل/٤) = (ل/٤) ل − ٢ (ل/٤)² / (ل/٤) = ٤/ل

١٢

نفرض أن نصف قطر دائرته = س
وطول القوس = ص
مساحته = ½ س ص = ١٦ ∴ ص = ٣٢/س
المحيط ح = ٢ س + ص = ٢ س + ٣٢/س
= ٢ س + ٣٢ س⁻¹ ∴ ح′ = ٢ − ٣٢ س⁻²
∴ ح′ = ٢ − ٦٤ س⁻²
بوضع ح′ = ٠ ∴ س = ±٤
∴ ح″ (٤) = ١
∴ ح لها قيمة صغرى عند س = ٤
∴ طول نصف القطر = ٤ سم
، ص = ٣٢/٤ = ٨ ∴ م″ = ٣٢/س = ٨/٤ = ١٦

١٣

نفرض أن بعدي المستطيل هما
س ، ص

∴ ٢ س + ص = ٨٠٠ متر
∴ ص = ٨٠٠ − ٢ س
نفرض أن مساحة المستطيل = م = س ص
∴ م = س (٨٠٠ − ٢ س) = ٨٠٠ س − ٢ س²
∴ م′ = ٨٠٠ − ٤ س
بوضع م′ = ٠ ∴ س = ٢٠٠ متر

١٤

نفرض أن نصف قطر دائرته س
وطول القوس = ص ومحيطه الثابت = ل
∴ ٢ س + ص = ل ∴ ص = ل − ٢ س
مساحته م = ½ س ص = ½ س (ل − ٢ س)
= ½ ل س − س²

∵ م′ = −١

∴ م(٢٠٠) = −١ < ٠

∴ م لها قيمة عظمى عند س = ٢٠٠ متر

بعدا المستطيل ٢٠٠ متر ، ٤٠٠ متر

أكبر مساحة = ٢٠٠ × ٤٠٠ = ٨٠٠٠٠ متر²

١٤

نفرض أن البعدين هما

س ، ص مترًا

∴ س × ص = ٢٠١٨ ∴ ص = $\frac{٢٠١٨}{س}$

∵ ل (طول السور) = ٢ س + ص

= ٢ س + $\frac{٢٠١٨}{س}$

∴ ل′ = ٢ − $\frac{٢٠١٨}{س^٢}$

∵ ل′ = ٠ ∴ ٢ = $\frac{٢٠١٨}{س^٢}$

∴ س = ٣٢ ومنها ص = ٦٣

∵ ل″ = ١٠٩٦ س⁻³ ∴ ل″(٣٢) = $\frac{١٠٩٦}{(٣٢)^٣}$ > ٠

∴ ل تكون أقل ما يمكن

∴ بعدا قطعة الأرض هما ٣٢ متر ، ٦٣ متر

١٥

س + ص = ٥ ∴ ص = ٥ − س

نفرض أن

ح = حاصل ضرب مربع الأول × مكعب الثاني

= س² × ص³ = س² (٥ − س)³

ح′ = ٢ س (٥ − س)³ + س² × ٣ (٥ − س)² × −١

= ٢ س (٥ − س)³ − ٣ س² (٥ − س)²

= س (٥ − س)² (٢ (٥ − س) − ٣ س)

= س (٥ − س)² (١٠ − ٥ س)

= ٥ س (٢ − س) (٥ − س)²

∵ ح′ = ٠ ∴ س = ٠ ، ٢ ، ٥

عند س = ٢ حاصل الضرب أكبر ما يمكن

∴ ص = ٣ الزوج المرتب هو (٢ ، ٣)

١٦

نفرض أن النقطة على الصورة (س ، ص)

، المسافة ف

∴ ف = $\sqrt{(س − ٠)^٢ + (ص − ٢)^٢}$

= $\sqrt{س^٢ + ص^٢ − ٤ ص + ٤}$

∵ س² = ص² = ٨

∴ ف = $\sqrt{ص^٢ + ٨ + ص^٢ − ٤ ص + ٤}$

= $\sqrt{٢ ص^٢ − ٤ ص + ١٢}$

∴ $\frac{ف}′$ = $\frac{٤ ص − ٤}{٢ \sqrt{٢ ص^٢ − ٤ ص + ١٢}}$

= $\frac{٢ ص − ٢}{\sqrt{٢ ص^٢ − ٤ ص + ١٢}}$

∴ $\frac{ف}′$ = ٠ عندما ص = ١

∴ عند ص = ١ هناك قيمة صغرى محلية

∴ س² = ٨ + ١ = ٩ ∴ س = ٣

∴ النقطة هي (٣ ، ١) ، (−٣ ، ١)

١٧

نفرض أن النقطة (س ، ص) تقع على المنحنى

ص = $\frac{١}{٢}$ س² − ٤

∴ النقطة هي (س ، $\frac{١}{٢}$ س² − ٤)

[illegible]

∴ ص = ٠ (مرفوض) ، س = ٥

∵ $\frac{ص}{س}$ > ٠ عندما س > ٥

∵ $\frac{ص}{س}$ < ٠ عندما س < ٥

∴ توجد قيمة عظمى عند س = ٥

∴ طول قاعدة المثلث = ١٠ سم

وطول كل من الضلعين الآخرين = ١٠ سم

∴ مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما يكون

المثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه = ١٠ سم

١١

س² + ص² = ١٠٠

ص = $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

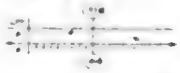
مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س × ص

م = $\frac{١}{٢}$ س $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

م′ = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{−٢ س}{٢ \sqrt{١٠٠ − س^٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

= $\frac{−س^٢}{\sqrt{١٠٠ − س^٢}}$ + $\frac{١٠٠ − ٢ س^٢}{٢ \sqrt{١٠٠ − س^٢}}$

م′ = ٠ ∴ س = ٥ $\sqrt{٢}$



عند س = ٥ $\sqrt{٢}$ يحقق م قيمة عظمى

طولا ضلعي القائمة هي ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم

حل آخر :

مساحة المثلث (م)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ جتا θ × ١٠ جا θ

= ٥٠ جا θ جتا θ

= ٢٥ جا ٢θ

∵ م′ = ٠ ∴ جا ٢θ = ٠ ∴ ٢θ = ٩٠° ∴ θ = ٤٥°

∵ جا ٢θ = ١ ∴ م″ = −٥٠ ∴ (م″) < صفر

∴ المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما θ = ٤٥°

∴ طولي ضلعي القائمة هما ١٠ جا ٤٥° ، ١٠ جتا ٤٥°

أي ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم

١٢

س² + ص² = ٤ ∴ ص = $\sqrt{٤ − س^٢}$

< س < $\sqrt{٢}$ ∴ م = ٢ س $\sqrt{٤ − س^٢}$

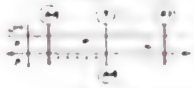
م′ = ٢ × $\frac{−٢ س}{٢ \sqrt{٤ − س^٢}}$ + ٢ $\sqrt{٤ − س^٢}$

= $\frac{−٢ س^٢}{\sqrt{٤ − س^٢}}$ + ٢ $\sqrt{٤ − س^٢}$

بوضع م′ = ٠

∴ ٤ (٤ − س²) = س² ∴ ٤ س² = ١٦

ومنها س = ٢ ، س = −٢ مرفوض



∴ م = ٤ وهي أكبر قيمة ممكنة

١٣

س² + ص² = ٩

ص = $\sqrt{٩ − س^٢}$

ح = س ص

= $\frac{١}{٢}$ س $\sqrt{٩ − س^٢}$

ح′ = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{−٢ س}{٢ \sqrt{٩ − س^٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٩ − س^٢}$

= $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{−س^٢}{\sqrt{٩ − س^٢}} + \frac{٩ − ٢ س^٢}{\sqrt{٩ − س^٢}}\right)$

بوضع ح′ = ٠ ∴ س = ١٥ $\sqrt{٢}$ سم

ف = $\sqrt{(س − ٠)^٢ + (\frac{١}{٢} س^٢ − ٤ − ٥)^٢}$

= $\sqrt{س^٢ + ٨ س^٢ + ٨١}$

∴ ف′ = $\frac{٩ س^٢ − ١٦ س}{٢ \sqrt{س^٢ + ٨ س^٢ + ٨١}}$

بوضع ف′ = ٠ ∴ س = ٠ أو س = $\frac{١٦}{٩}$

ف أقل ما يمكن عند س = −$\frac{٤}{٣}$ ،

∴ أقرب نقطة هي (−$\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$) ، (٤ ، ٥)

١٨

نفرض أن (س ، ص) هي نقطة على المنحنى

س² = ٤ س ∴ س = $\frac{١}{٢}$ ص²

∴ النقطة ($\frac{١}{٢}$ ص² ، ص)

البعد بين النقطة والمستقيم

ف = $\frac{|س − ٢ ص + ١|}{\sqrt{(١)^٢ + (−٢)^٢}}$ = $\frac{|\frac{١}{٢} ص^٢ − ٢ ص + ١|}{\sqrt{٥}}$

ف = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ $|\frac{١}{٢} ص^٢ − ٢ ص + ١|$

∵ $\frac{١}{٢}$ ص² − ٢ ص + ١ موجبة لجميع قيم ص

∴ ف = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ($\frac{١}{٢}$ ص² − ٢ ص + ١)

∴ ف′ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ($\frac{١}{٢}$ ص − ٢)

بوضع ف′ = ٠ ∴ ص = ٤

أقصر بعد هو ف = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (٨ − ٢ + ١) = $\frac{٧}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{٧ \sqrt{٥}}{٥}$

[illegible]

∴ ص = ٠ (مرفوض) ، س = ٥

∵ $\frac{ص}{س}$ > ٠ عندما س > ٥

∵ $\frac{ص}{س}$ < ٠ عندما س < ٥

∴ توجد قيمة عظمى عند س = ٥

∴ طول قاعدة المثلث = ١٠ سم

وطول كل من الضلعين الآخرين = ١٠ سم

∴ مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما يكون

المثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه = ١٠ سم

١١

س² + ص² = ١٠٠

ص = $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س × ص

م = $\frac{١}{٢}$ س $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

م′ = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{−٢ س}{٢ \sqrt{١٠٠ − س^٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

= $\frac{−س^٢}{\sqrt{١٠٠ − س^٢}}$ + $\frac{١٠٠ − ٢ س^٢}{٢ \sqrt{١٠٠ − س^٢}}$

م′ = ٠ ∴ س = ٥ $\sqrt{٢}$

عند س = ٥ $\sqrt{٢}$ يحقق م قيمة عظمى

طولا ضلعي القائمة هي ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم

حل آخر :

مساحة المثلث (م)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ جا θ × ١٠ جتا θ

= ٥٠ جا θ جتا θ

= ٢٥ جا ٢θ

∵ م′ = ٠ ∴ جا ٢θ = ٠ ∴ ٢θ = ٩٠° ∴ θ = ٤٥°

∵ جا ٢θ = ١ ∴ م″ = −٥٠ ∴ (م″) < صفر

∴ المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما θ = ٤٥°

∴ طولي ضلعي القائمة هما ١٠ جا ٤٥° ، ١٠ جتا ٤٥°

أي ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم

١٢

س² + ص² = ٤ ∴ ص = $\sqrt{٤ − س^٢}$

< س < $\sqrt{٢}$ ∴ م = ٢ س $\sqrt{٤ − س^٢}$

م′ = ٢ × $\frac{−٢ س}{٢ \sqrt{٤ − س^٢}}$ + ٢ $\sqrt{٤ − س^٢}$

= $\frac{−٢ س^٢}{\sqrt{٤ − س^٢}}$ + ٢ $\sqrt{٤ − س^٢}$

بوضع م′ = ٠

∴ ٤ (٤ − س²) = س² ∴ ٤ س² = ١٦

ومنها س = ٢ ، س = −٢ مرفوض

∴ م = ٤ وهي أكبر قيمة ممكنة

١٣

س² + ص² = ٩

ص = $\sqrt{٩ − س^٢}$

ح = س ص

= $\frac{١}{٢}$ س $\sqrt{٩ − س^٢}$

ح′ = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{−٢ س}{٢ \sqrt{٩ − س^٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٩ − س^٢}$

= $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{−س^٢}{\sqrt{٩ − س^٢}} + \frac{٩ − ٢ س^٢}{\sqrt{٩ − س^٢}}\right)$

بوضع ح′ = ٠ ∴ س = ١٥ $\sqrt{٢}$ سم

ف = $\sqrt{(س − ٠)^٢ + (\frac{١}{٢} س^٢ − ٤ − ٥)^٢}$

= $\sqrt{س^٢ + ٨ س^٢ + ٨١}$

∴ ف′ = $\frac{٩ س^٢ − ١٦ س}{٢ \sqrt{س^٢ + ٨ س^٢ + ٨١}}$

بوضع ف′ = ٠ ∴ س = ٠ أو س = $\frac{١٦}{٩}$

ف أقل ما يمكن عند س = −$\frac{٤}{٣}$ ،

∴ أقرب نقطة هي (−$\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$) ، (٤ ، ٥)

١٨

نفرض أن (س ، ص) هي نقطة على المنحنى

س² = ٤ س ∴ س = $\frac{١}{٢}$ ص²

∴ النقطة ($\frac{١}{٢}$ ص² ، ص)

البعد بين النقطة والمستقيم

ف = $\frac{|س − ٢ ص + ١|}{\sqrt{(١)^٢ + (−٢)^٢}}$ = $\frac{|\frac{١}{٢} ص^٢ − ٢ ص + ١|}{\sqrt{٥}}$

ف = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ $|\frac{١}{٢} ص^٢ − ٢ ص + ١|$

∵ $\frac{١}{٢}$ ص² − ٢ ص + ١ موجبة لجميع قيم ص

∴ ف = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ($\frac{١}{٢}$ ص² − ٢ ص + ١)

∴ ف′ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ($\frac{١}{٢}$ ص − ٢)

بوضع ف′ = ٠ ∴ ص = ٤

أقصر بعد هو ف = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (٨ − ٢ + ١) = $\frac{٧}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{٧ \sqrt{٥}}{٥}$

[illegible]

∴ ص = ٠ (مرفوض) ، س = ٥

∵ $\frac{ص}{س}$ > ٠ عندما س > ٥

∵ $\frac{ص}{س}$ < ٠ عندما س < ٥

∴ توجد قيمة عظمى عند س = ٥

∴ طول قاعدة المثلث = ١٠ سم

وطول كل من الضلعين الآخرين = ١٠ سم

∴ مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما يكون

المثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه = ١٠ سم

١١

س² + ص² = ١٠٠

ص = $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س × ص

م = $\frac{١}{٢}$ س $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

م′ = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{−٢ س}{٢ \sqrt{١٠٠ − س^٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

= $\frac{−س^٢}{\sqrt{١٠٠ − س^٢}}$ + $\frac{١٠٠ − ٢ س^٢}{٢ \sqrt{١٠٠ − س^٢}}$

م′ = ٠ ∴ س = ٥ $\sqrt{٢}$

عند س = ٥ $\sqrt{٢}$ يحقق م قيمة عظمى

طولا ضلعي القائمة هي ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم

حل آخر :

مساحة المثلث (م)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ جا θ × ١٠ جتا θ

= ٥٠ جا θ جتا θ

= ٢٥ جا ٢θ

∵ م′ = ٠ ∴ جا ٢θ = ٠ ∴ ٢θ = ٩٠° ∴ θ = ٤٥°

∵ جا ٢θ = ١ ∴ م″ = −٥٠ ∴ (م″) < صفر

∴ المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما θ = ٤٥°

∴ طولي ضلعي القائمة هما ١٠ جا ٤٥° ، ١٠ جتا ٤٥°

أي ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم

١٢

س² + ص² = ٤ ∴ ص = $\sqrt{٤ − س^٢}$

< س < $\sqrt{٢}$ ∴ م = ٢ س $\sqrt{٤ − س^٢}$

م′ = ٢ × $\frac{−٢ س}{٢ \sqrt{٤ − س^٢}}$ + ٢ $\sqrt{٤ − س^٢}$

= $\frac{−٢ س^٢}{\sqrt{٤ − س^٢}}$ + ٢ $\sqrt{٤ − س^٢}$

بوضع م′ = ٠

∴ ٤ (٤ − س²) = س² ∴ ٤ س² = ١٦

ومنها س = ٢ ، س = −٢ مرفوض

∴ م = ٤ وهي أكبر قيمة ممكنة

١٣

س² + ص² = ٩

ص = $\sqrt{٩ − س^٢}$

ح = س ص

= $\frac{١}{٢}$ س $\sqrt{٩ − س^٢}$

ح′ = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{−٢ س}{٢ \sqrt{٩ − س^٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٩ − س^٢}$

= $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{−س^٢}{\sqrt{٩ − س^٢}} + \frac{٩ − ٢ س^٢}{\sqrt{٩ − س^٢}}\right)$

بوضع ح′ = ٠ ∴ س = ١٥ $\sqrt{٢}$ سم

ح = س × [illegible] × ٢ √نق − س

[illegible]

[illegible]

[illegible]

∴ ح = [illegible] − ٢ √نق

يوجد قيمة عظمى

وبالتعويض عن (١) س = ٢ √نق

س = ص = ٢ √نق

∴ الشكل مربع مساحته = ٢ √نق × ٢ √نق

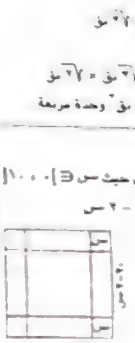
= ٢ نق² وحدة مربعة

٢٦

نفرض أن طول ضلع المربع س حيث س ∈]٠ ، ١٠[

∴ طول قاعدة الصندوق = ٢٠ − ٢ س

ارتفاع الصندوق = س



∴ حجم الصندوق (ح)

= (٢٠ − ٢ س)² × س

= س (٢٠ − ٢ س)²

= ٤ س (١٠ − س)² = ٤٠٠ س − ٨٠ س² + ٤ س³

ح′ = ٤٠٠ − ١٦٠ س + ١٢ س²

ح′ = ٠ فإن س = ١٠ مرفوض ، س = $\frac{١٠}{٣}$

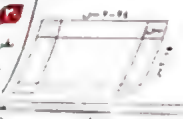
ح″ = ١٦٠ − ٢٤ س

(ح″)$_{س = \frac{١٠}{٣}}$ = −٨٠

∴ طول ضلع المربع في الجزء المقطوع = $\frac{١٠}{٣}$ سم

٢٨

أبعاد متوازي المستطيلات



حجم العلبة (ح)

= (٢٤ − ٢ س) × (١٥ − ٢ س) (س)

= ٢ س (١٢ − س) (١٥ − ٢ س)

= ٣٦ س² − ٧٨ س³ + ٤ س³

ح′ = ٣٦٠ − ١٥٦ س + ١٢ س²

بوضع ح′ = ٠ ⟹ س = ١٠ (مرفوض) ، س = ٣

ح″ = ١٥٦ + ٢٤ س

(ح″)$_{س = ٣}$ < ٠ (عظمى)

أبعاد العلبة هي ١٨ ، ٩ ، ٣ سم

٢٩

نفرض أن طول ضلع القاعدة = س ، وارتفاعه = ع

∴ ٨ س + ٤ ع = ٢٤٠

∴ ٢ س + ع = ٦٠

∴ ع = ٦٠ − ٢ س (١)

∵ ح = س² ع

ومن (١) ∴ ح = ٦٠ س² − ٢ س³

∴ ح′ = ١٢٠ س − ٦ س² وعند ح′ = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٢٠

∵ ح″ = ١٢٠ − ١٢ س ، عند س = ٢٠

فإن ح″ = −١٢٠ < ٠ ∴ توجد نهاية عظمى

∴ عند س = ٢٠ سم يكون الحجم أكبر ما يمكن

ومن (١) ∴ ع = ٢٠ سم

∴ أبعاد متوازي المستطيلات ذو أكبر حجم هي

٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ سم

٣٠

نفرض أن بعدي القاعدة = س ، ٢ س والارتفاع ع

∵ س + ٢ س + ع = ١٨

[illegible]

[illegible]

وعندما يكون الحجم أكبر ما يمكن وبالتعويض في (١)

∴ ح = ١٢٠٠٠ π − ٨٠٠٠ π = ٤٠٠٠ π سم³

٣٤

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق

ارتفاع الأسطوانة ع سم

∴ حجم الأسطوانة ح = π نق² ع

∴ مساحة الأسطوانة الكلية = ٢ π نق (ع + نق)

= ١٥٠ π

∴ ع = $\frac{٧٥ - نق}{نق}$

∴ ح = π نق² × $\frac{٧٥ - نق}{نق}$ = ٧٥ π نق − π نق²

ح′ = ٧٥ π − ٢ π نق

ح′ = ٠ ∴ نق = ٥ سم

ح″ = −٢ π نق

(ح″)$_{نق = ٥}$ < ٠ (عظمى)

∴ أكبر حجم = ح$_{نق = ٥}$ = ٧٥ π (٥) − π (٥)²

= ٢٥٠ π سم³

٣٥

نفرض أن طول نصف قطر قاعدته = نق

وارتفاعه = ع

ح (سعته) = π نق² ع = ٨٠٠٠ π

∴ ع = $\frac{٨٠٠٠}{نق}$

مساحته السطحية م = π نق² + ٢ π نق ع

= π نق² + ٢ π نق × $\frac{٨٠٠٠}{نق}$

= π نق² + ١٦٠٠٠ π نق

[illegible]

∴ نق = ٢٠ ، ٨

∵ نق > ٠

∵ م″ = ٦ π > ٠ ، أقل ما يمكن

∴ الأبعاد نق = ٢ سم ، ع = ٢٠ سم

٣٦

الحجم ك = π نق² ع ∴ ع = $\frac{ك}{π نق}$

المادة التي تصنع منها العلبة = المساحة الكلية للأسطوانة × السُّمك

م = ٢ π نق (ع + نق) × هـ

= ٢ π نق × ($\frac{ك}{π نق}$ + نق) × هـ

= ٢ هـ (ك نق⁻¹ + π نق²)

م′ = ٢ هـ (٢ π نق − ك نق⁻²)

∴ م′ = ٢ هـ (٢ π − ٢ ك نق⁻²)

م′ = ٠ فإن نق = $\sqrt{\frac{ك}{π}}$

عند نق < $\sqrt{\frac{ك}{π}}$ فإن م′ < ٠ (قيمة صغرى)

[illegible]

٣٧

الربح = سعر البيع − سعر التكلفة

ر = [illegible] س) + س [illegible] (١٥ − س)

[illegible]

ر″ = [illegible] س < ٠

∴ س = ١٥

ر″ = [illegible] < ٠ عظمى

∴ عدد الوحدات التي يجب انتاجها = ١٥٠

٣٢

حجم متوازي المستطيلات (ح)

= س × ٢ س × ع = ٢ س² (١٨٠ − ٣ س)

= ٣٦٠ س² − ٦ س³

ح′ = ٧٢٠ س − ١٨ س²

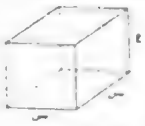
ح′ = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٤٠

ح″ = ٧٢٠ − ٣٦ س

(ح″)$_{س = ٤٠}$ < ٠ أكبر ما يمكن

الأبعاد هي ٤٠ سم ، ٨٠ سم ، ٦٠ سم

٣٣



نفرض أن طول ضلع

القاعدة المربعة = س سم

وارتفاع الصندوق = ع سم

∵ المساحة الكلية = ٢ س² + ٤ س ع

∴ ٢ س² + ٤ س ع = ٣٨٤

∴ ع = $\frac{٣٨٤ − ٢ س²}{٤ س}$ = $\frac{١٩٢ − س²}{٢ س}$

∴ حجم الصندوق (ح) = س² ع

= $\frac{س² (١٩٢ − س²)}{٢ س}$

= ٩٦ س − $\frac{١}{٢}$ س³

∴ $\frac{دح}{دس}$ = ٩٦ − $\frac{٣}{٢}$ س²

∵ $\frac{دح}{دس}$ = ٠ ∴ $\frac{٣}{٢}$ س² = ٩٦

∴ س² = ٦٤ ∴ س = ٨

∵ $\frac{د²ح}{دس²}$ = −٣ س

∴ عندما س = ٨ فإن $\frac{د²ح}{دس²}$ < صفر

∴ الحجم أكبر ما يمكن

أكبر حجم (ح) = ٩٦ س − $\frac{١}{٢}$ س³

= ٩٦ × ٨ − $\frac{١}{٢}$ (٨)³ = ٥١٢ سم³

٣٤

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق سم

، ارتفاع الأسطوانة = ع سم

، حجم الأسطوانة = ح سم³

∵ نق + ع = ٣٠ ∴ ع = ٣٠ − نق

∵ ح = π نق² ع = π نق² (٣٠ − نق)

= ٣٠ π نق² − π نق³ (١)

∴ $\frac{دح}{دنق}$ = ٦٠ π نق − ٣ π نق²

∴ ح′ = ٦٠ π − ٦ π نق

[illegible]

٣٥

[illegible]

مجموع المحيطين م = س + ص

∴ س + ص = ٤٠

∴ م = ١ + $\frac{٢ س}{٢}$ + ١ + $\frac{٢ ص}{٢}$

∴ م = ٢ + س + ص

∴ م = ٢ + س + $\sqrt{٤٠ − س}$

∴ م′ = ١ − $\frac{١}{٢\sqrt{٤٠ − س}}$

∴ م″ = $\frac{−١}{٤(٤٠ − س)\sqrt{٤٠ − س}}$

(م″)$_{س = ٣٠}$ < ٠ (أكبر ما يمكن)

∴ التحيز س = ١ + $\sqrt{٣٠}$ ، ص = ١ + $\sqrt{٣٠}$

٣٦

∵ د (س) = $\frac{٦}{س + ٢٠}$

∴ ميل المماس ر′ (س) = $\frac{−١٢ س}{(س + ٢٠)²}$

∴ ر″ (س) = $\frac{١٢ (س + ٢٠)² − ١٢٠ س × ٢ (س + ٢٠)}{(س + ٢٠)⁴}$

= $\frac{٢٦ (س − ١)}{(س + ٢٠)³}$

ميل المماس ر′ (س) يكون أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن عندما يكون ر″ (س) = صفر

∴ س − ١ = ٠ ∴ س = ١ أو س = −١

[illegible]

∴ توجد قيمة عظمى عند س = −١

وهي (−١ ، $\frac{٣}{٢}$) ، توجد قيمة صغرى عند س = ١

وهي (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

∴ ميل المماس يكون أكبر ما يمكن عند النقطة (−١ ، $\frac{٣}{٢}$)

، ميل المماس يكون أصغر ما يمكن عند النقطة (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

٣٧

نفرض أن ق = $\frac{جتا س}{١ + جا س}$

ق′ = $\frac{−جا س (١ + جا س) − جتا س (جتا س)}{(١ + جا س)²}$

= $\frac{−جا س − جا² س − جتا² س}{(١ + جا س)²}$

= $\frac{−جا س − ١}{(١ + جا س)²}$

ق′ = ٠ ∴ جا س = −١

∴ س = $\frac{−π}{٢}$

ق″ = $\frac{−جتا س (١ + جا س)² − (−جا س − ١) (٢ جتا س) (١ + جا س)}{(١ + جا س)⁴}$

= $\frac{−جتا س (١ + جا س) + ٢ جتا س (−جا س − ١)}{(١ + جا س)³}$

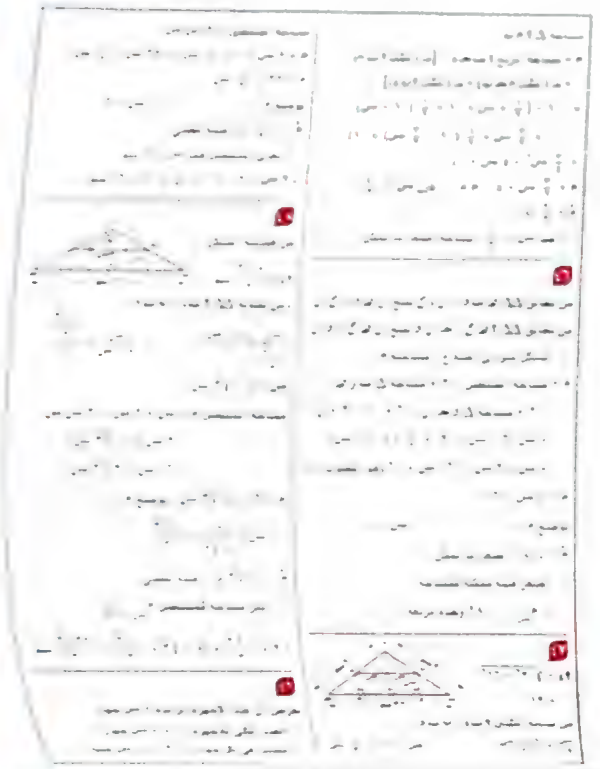
= $\frac{−جتا س − ٢ جتا س جا س − ٢ جتا س}{(١ + جا س)³}$

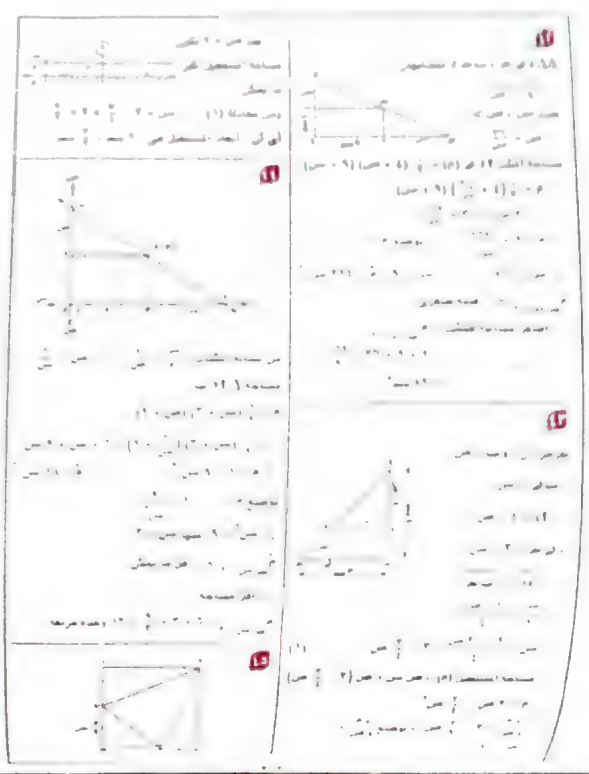
(ق″)$_{س = \frac{−π}{٢}}$ < ٠ (قيمة عظمى)

∴ (ق)$_{س = \frac{−π}{٢}}$ = $\frac{جتا (\frac{−π}{٢})}{١ + جا (\frac{−π}{٢})}$ = $\frac{٠}{٠}$

= $\frac{٠}{٠}$

∴ $\frac{جتا س}{١ + جا س}$ ≥ $\frac{١}{٢}$ لجميع قيم س الموجبة





∴ تَ = ٤ π ك (−٥٤ نق^{٢} + ٢ نق)

، تَ = ٤ π ك (١٠٨ نق^{٢} + ٢)

بوضع تَ = صفر

∴ −٥٤ نق^{٢} + ٢ نق = ٠ ∴ نق = ٣

، ∵ (تَ)$_{نق = ٣}$ = ٤ π ك ($\frac{١٠٨}{٢٧}$ + ٢) > ٠ قيمة صغرى

∴ أقل تكلفة عند نق = ٣ ، ع = ١٢

٧٤

بفرض طول ضلع المربع = س

وطول نصف قطر الدائرة = نق

∴ ٤ س + ٢ π نق = ٨٠

∴ س = ٢٠ − $\frac{١}{٢}$ π نق (١)

، ∵ مجموع مساحتي الشكلين (م)

م = س^{٢} + π نق^{٢} (٢)

من (١) ، (٢)

∴ م = (٢٠ − $\frac{١}{٢}$ π نق)^{٢} + π نق^{٢}

∴ $\frac{دم}{دنق}$ = ٢ (٢٠ − $\frac{١}{٢}$ π نق) × (−$\frac{١}{٢}$ π) + ٢ π نق

= −٢٠ π + $\frac{١}{٢}$ π^{٢} نق + ٢ π نق

، عند $\frac{دم}{دنق}$ = صفر ∴ $\frac{١}{٢}$ π نق + ٢ نق = ٢٠

نق (٢ + $\frac{١}{٢}$ π) = ٢٠ ∴ نق = $\frac{٢٠}{٢ + \frac{١}{٢}\pi}$ = $\frac{٤٠}{٤ + \pi}$

، ∵ $\frac{د^{٢}م}{دنق^{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ π^{٢} + ٢ π > صفر

∴ المساحة قيمة صغرى عندما نق = $\frac{٤٠}{٤ + \pi}$

∴ س = ٢٠ − $\frac{٢٠ \pi}{٤ + \pi}$ = $\frac{٨٠ + ٢٠ \pi - ٢٠ \pi}{٤ + \pi}$

∴ س = $\frac{٨٠}{٤ + \pi}$ ∴ س = ٢ نق

∴ عندما يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع قيمة صغرى فإن طول ضلع المربع = طول قطر الدائرة.

٧٥

بفرض طول ضلع المربع = س

وطول نصف قطر الدائرة = نق

∴ ٤ س + ٢ π . نق = ٣٤

∴ س = $\frac{١٧}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ π نق م = س^{٢} + π نق^{٢}

م = $\frac{٢٨٩}{٤}$ − $\frac{١٧}{٢}$ π نق + $\frac{١}{٤}$ π^{٢} نق^{٢} + π نق^{٢}

مَ = − $\frac{١٧}{٢}$ π + $\frac{١}{٢}$ π^{٢} نق + ٢ π نق

مَ = ٠ عند نق = $\frac{\frac{١٧}{٢}}{٢ + \frac{١}{٢}\pi}$ = $\frac{١٧}{٤ + \pi}$

مً = $\frac{١}{٢}$ π^{٢} + ٢ π > ٠ قيمة صغرى

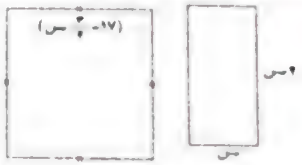
∴ طول الجزء الأول = ٤ س = ٣٤ − ٢ π ($\frac{١٧}{٤ + \pi}$)

= $\frac{٣٤ \pi + ١٣٦ - ٣٤ \pi}{٤ + \pi}$

= $\frac{١٣٦}{٤ + \pi}$

طول الجزء الثاني = ٢ π نق = ٢ π × $\frac{١٧}{٤ + \pi}$ = $\frac{٣٤ \pi}{٤ + \pi}$

٧٦



بفرض أن عرض المستطيل = س

∴ طوله = ٢ س سم

∴ محيط المستطيل = (س + ٢ س) × ٢ = ٦ س

∴ محيط المربع = ٦٨ − ٦ س

∴ طول ضلع المربع = $\frac{٦٨ - ٦ س}{٤}$

= (١٧ − $\frac{٣}{٢}$ س) سم

∴ مجموع مساحتي المستطيل والمربع (م)

= س × ٢ س + (١٧ − $\frac{٣}{٢}$ س)^{٢}

∴ م = ٢ س^{٢} + (١٧ − $\frac{٣}{٢}$ س)^{٢}

∴ $\frac{دم}{دس}$ = ٤ س + ٢ (١٧ − $\frac{٣}{٢}$ س) × −$\frac{٣}{٢}$

= ٤ س + $\frac{٩}{٢}$ س − ٥١

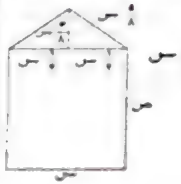
= $\frac{١٧}{٢}$ س − ٥١

، ∵ $\frac{دم}{دس}$ = ٠ ⟸ س = ٦ ، $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}$ = $\frac{١٧}{٢}$ > ٠

∴ مجموع المساحتين أصغر ما يمكن

عندما س = ٦ سم

٧٥



المحيط = ٢ ص + س + ٢ × $\frac{٥}{٨}$ س

= ٢ ص + $\frac{٩}{٤}$ س

= ١٢٠ سم

∴ ص = ٦٠ − $\frac{٩}{٨}$ س

مساحة النافذة (م) = س ص + $\frac{١}{٢}$ (س) ($\frac{٣}{٨}$ س)

= س ص + $\frac{٣}{١٦}$ س^{٢}

∴ م = س (٦٠ − $\frac{٩}{٨}$ س) + $\frac{٣}{١٦}$ س^{٢}

= ٦٠ س − $\frac{١٥}{١٦}$ س^{٢}

مَ = ٦٠ − $\frac{١٥}{٨}$ س

مَ = ٠ عند س = ٣٢ سم

مً = − $\frac{١٥}{٨}$ < ٠ عظمى محلية عند س = ٣٢

بعدا المستطيل هما ٣٢ سم ، ٢٤ سم

٧٦

بفرض أن بعدي المستطيل

= ص ، ٢ س

∴ نصف قطر (نصف الدائرة) = س

محيط النافذة = ٢ س + ٢ ص + $\frac{١}{٢}$ (٢ π س)

= ٢ ص + ٢ س + π س = ٦

∴ ص = ٣ − س − $\frac{π}{٢}$ س

مساحة النافذة = م = ٢ س × ص + $\frac{١}{٢}$ π س^{٢}

= ٢ س (٣ − س − $\frac{π}{٢}$ س)

+ $\frac{١}{٢}$ π س^{٢} = ٦ س − ٢ س^{٢}

− π س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ π س^{٢}

= ٦ س − ٢ س^{٢} − $\frac{١}{٢}$ π س^{٢}

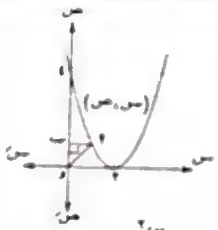
مَ = ٦ − ٤ س − π س

بوضع مَ = ٠ ∴ س = $\frac{٦}{٤ + π}$

مً = −٤ − π < ٠ قيمة عظمى

∴ نصف قطر (نصف الدائرة) التي يجعل المساحة أكبر ما يمكن هو $\frac{٦}{٤ + π}$

٧٧



نفرض أن أ = (س ، ص)

تنتمي لمنحنى الدالة

ص = (س − ٢)^{٢}

∴ م (مساحة Δ أ ب د)

= $\frac{١}{٢}$ س ص = $\frac{١}{٢}$ س (س − ٢)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٢ س

∴ $\frac{دم}{دس}$ = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − ٤ س + ٢ وبوضع $\frac{دم}{دس}$ = ٠

∴ ٣ س^{٢} − ٨ س + ٤ = ٠

∴ (٣ س − ٢) (س − ٢) = ٠

∴ س = $\frac{٢}{٣}$ أ ، س = ٢

∴ م تكون أكبر

مساحة عند س = $\frac{٢}{٣}$

ومنها ص = $\frac{١٦}{٩}$

∴ النقطة أ = ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١٦}{٩}$)

٧٨

من هندسة الشكل نجد أن :

أ ب = ق$\frac{١}{٢}$ θ

، ب جـ = ٨ ق$\frac{١}{٢}$ θ

، ويفرض ك = أ ب + ب جـ

∴ ك = ق$\frac{١}{٢}$ θ + ٨ ق$\frac{١}{٢}$ θ

، ∵ $\frac{دك}{دθ}$ = − ق$\frac{١}{٢}$ θ ق$\frac{١}{٢}$ θ + ٨ ق$\frac{١}{٢}$ θ ط$\frac{١}{٢}$ θ

وبوضع $\frac{دك}{دθ}$ = ٠

∴ أب = ب حـ = ٢ سم

٨٠

نفرض أن ق (د ى) = ق (د حـ) = θ

في Δ أ ى د أى = $\frac{١}{جا θ}$

في Δ أ ب حـ أحـ = $\frac{٢\sqrt{٣}}{جا θ}$

∵ حـ = أى + أحـ = $\frac{١}{جا θ}$ + $\frac{٢\sqrt{٣}}{جا θ}$

أحـ = $\frac{جا θ}{جا θ}$ + $\frac{٢\sqrt{٣}\ جا θ}{جا θ}$

وبوضع $\frac{جا θ}{جا θ}$ = صفر ∴ ١ + ٢√٣ جا θ = ٠

∴ جا θ = $\frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$ ∴ θ = $\frac{-\pi}{٦}$

∴ θ = $\frac{\pi}{٦}$

∴ أى + أحـ أصغر ما يمكن عندما θ = $\frac{\pi}{٦}$

∴ ظا (حـ) = $\frac{أب}{ب حـ}$ ⟸ $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ = $\frac{أب}{٢\sqrt{٣}}$

∴ أب = ٢

∴ ق ب = ٢ × ٢ = ٤ سم

٨١

من هندسة الشكل حول س

حـ = س × ١٦ (الفرض)

∴ م = ½ √٢حـ = ½ √١٦ س س

∴ م (مساحة المثلث) = ½ س ع

= ½ س √١٦ س − س

∴ م = ½ × $\frac{١٦ - ٢س}{٢\sqrt{١٦ س - س}}$ × ½ √١٦ س − س

= $\frac{١٦ - ٢س}{٤}$ √١٦ س − س

= ٤ − ½ س √١٦ س − س

وبوضع م′ = ٠ ∴ ١٢ س − س² = ٠

∴ س (١٢ − س) = ٠

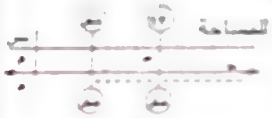
∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ١٢

∵ م′ تتغير إشارتها حول س = ١٢

من الموجب إلى السالب

∴ توجد قيمة عظمى للمساحة

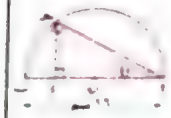
عند س = ١٢



وتساوي ع = ٤√٣

∴ م = ½ × ١٢ × ٤√٣ = ٢٤√٣ سم²

حل آخر :



في Δ أ ب حـ

∵ أب = ١٦ سم

∴ أحـ = ١٦ جا θ

• في Δ أ حـ ى ∴ أى = أحـ جا θ = ١٦ جا² θ

∴ م (مساحة Δ أ حـ ى)

= ½ × ١٦ جا θ × ١٦ جا² θ × جا θ

= ١٢٨ جا³ θ جا θ

∴ $\frac{دم}{دθ}$

= ١٢٨ [جا² θ × جا θ − جا θ × ٣ جا² θ × − جا θ]

= ١٢٨ [جا² θ − ٣ جا² θ جا² θ]

∴ $\frac{دم}{دθ}$ = ٠

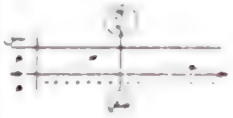
جا² θ − ٣ جا² θ جا² θ

جا θ = ٠ ومنها θ = $\frac{\pi}{٢}$ (مرفوض)

أو جا² θ = ٣ جا² θ ∴ ظا² θ = $\frac{١}{٣}$

∴ ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها θ = $\frac{\pi}{٦}$

∵ إشارة م′ تتغير



حول θ = $\frac{\pi}{٦}$

من الموجب إلى السالب

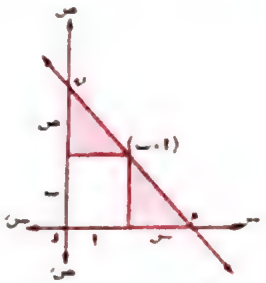
∴ توجد قيمة عظمى للمساحة عند θ = $\frac{\pi}{٦}$

• المساحة = ١٢٨ جا² $\frac{\pi}{٦}$ جا $\frac{\pi}{٦}$ = ٢٤√٣ سم²

٨١

① (حـ)	② (حـ)	③ (حـ)	④ (حـ)	⑤ (ب)
⑥ (حـ)	⑦ (أ)	⑧ (حـ)	⑨ (أ)	⑩ (د)
⑪ (ب)	⑫ (ب)	⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (أ)
⑯ (ب)	⑰ (حـ)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (حـ)
㉑ (ب)	㉒ (ب)	㉓ (حـ)	㉔ (أ)	㉕ (حـ)
㉖ (أ)	㉗ (ب)			

٨٢



من تشابه المثلثات $\frac{س}{ب}$ = $\frac{أ}{ص}$ ، ص = $\frac{أب}{س}$

مجموع الجزئين المقطوعين = ج = س + أ + ب + ص

∴ ج = س + أ + ب + $\frac{أب}{س}$ ∴ ج′ = ١ − $\frac{أب}{س^٢}$

بوضع ج′ = ٠ ∴ س = √أب

∴ ج″ = + $\frac{٢أب}{س^٣}$ > ٠ صغرى

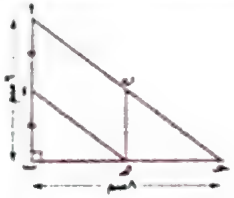
∴ أقل مجموع = س + ص + أ + ب

= √أب + $\frac{أب}{\sqrt{أب}}$ + أ + ب

= أ + ٢√أب + ب

= (√أ + √ب)²

٨٣



نفرض أن

م = ب ء × ء حـ

وبفرض أن :

ب ء = س سم

∴ م = س (٨ − س) = ٨ س − س²

∴ م′ = ٨ − ٢ س

م″ = −٢ < صفر (قيمة عظمى)

∴ م′ = ٠ عندما س = ٤ سم

∴ ء منتصف $\overline{ب حـ}$

• ∵ أحـ = √(٦)² + (٨)² = ١٠ سم

نفرض أن : ك = (أب)² + (ب حـ)²

وبفرض أن : أب = ص سم

∴ ك = ص² + (١٠ − ص)²

= ٢ ص² − ٢٠ ص + ١٠٠

∴ ك′ = ٤ ص − ٢٠

• ك″ = ٤ > ٠ (قيمة صغرى)

∴ ك′ = ٠ عندما ص = ٥ ∴ ب منتصف $\overline{أحـ}$

∴ الشكل أ ء ء ب متوازي أضلاع

∴ مساحة الشكل = طول القاعدة × الارتفاع

= ٣ × ٤ = ١٢ سم²

∵ $\triangle$ أ ب و ، $\triangle$ أ ب حـ متشابهان

∴ تتناسب أطوال أضلاعهما وارتفاعاتها

∴ $\frac{\text{ص}}{١٢} = \frac{\text{أ و}}{\text{أ ل}} = \frac{١٢ - \text{س}}{١٢}$

ص = ١٢ − $\frac{١}{٢}$ س

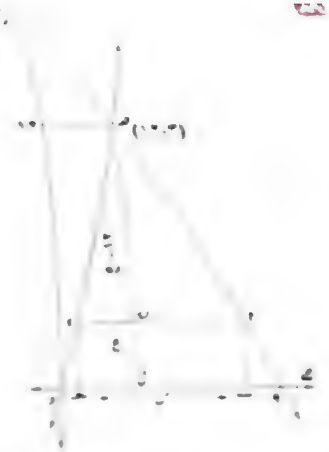
مساحة المستطيل = م = س ص = ١٢ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

م' = ١٢ − $\frac{٤}{٢}$ س

م' = صفر عند س = ٦

م'' = − $\frac{٤}{٢}$ < ٠ عظمى

∴ بعدا المستطيل ذي أكبر مساحة هي ٦ ، ٨ سم



لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين نحل المعادلتين معًا.

ص = ٤ س ، ص = ١٨ − ٢ س

∴ ٤ س = ١٨ − ٢ س ∴ ٦ س = ١٨

∴ س = ٣ ومنها ص = ١٢

∴ نقطة التقاطع . هـ = (٣ ، ١٢)

، بوضع ١٨ − ٢ س = ٠

∴ س = ٩ ∴ ك (٩ ، ٠)

ومن تشابه المثلثات نجد أن $\frac{\text{هـ ا}}{\text{هـ ك}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ل}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ك ل}}$

∴ $\frac{١٢ - ع}{١٢} = \frac{س}{٩}$ ∴ ٤ س = ٣٦ − ٣ ع

∴ س = ٩ − $\frac{٣}{٤}$ ع

، ∵ م (مساحة المستطيل) = ع س

∴ م = ع (٩ − $\frac{٣}{٤}$ ع) ∴ م = ٩ ع − $\frac{٣}{٤}$ ع^٢

∴ م$'$ = ٩ − $\frac{٣}{٢}$ ع

وبوضع م$'$ = ٠ ∴ ع = ٦ ومنها س = ٤.٥

، ∵ م$''$ = −$\frac{٣}{٢}$ < ٠

∴ توجد قيمة عظمى لمساحة المستطيل

، م = ٤.٥ × ٦ = ٢٧ وحدة مربعة.

، نق^٢ = ٢٢٥ − ع^٢

، ∵ حجم المخروط = ح = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

∴ ح = $\frac{\pi}{٣}$ ع (٢٢٥ − ع^٢)

= $\frac{\pi}{٣}$ (٢٢٥ ع − ع^٣)

ح$'$ = $\frac{\pi}{٣}$ (٢٢٥ − ٣ ع^٢)

بوضع ح$'$ = ٠ ∴ ع^٢ = $\frac{٢٢٥}{٣}$ = ٧٥

∴ ع = ٥ $\sqrt{٣}$

ح$''$ = $\frac{\pi}{٣}$ (−٦ ع) كمية سالبة (قيمة عظمى)

∴ أكبر حجم (ح)$_{ع = ٥\sqrt{٣}}$

= $\frac{\pi}{٣}$ × ٥ $\sqrt{٣}$ (٢٢٥ − (٥ $\sqrt{٣}$)^٢) = ٢٥٠ $\sqrt{٣}$ π سم^٣

٢١

نفرض أن إحداثي ب هي (س ، ٠)

∴ جـ هي (س ، $\frac{١}{٢}$ س + ١)

، ء هي (س ، ١ + ٤ س − س^٢)

طول $\overline{\text{جـ ء}}$ (م) = |ص$_ء$ − ص$_جـ$|

= (١ + ٤ س − س^٢) − ($\frac{١}{٢}$ س + ١)

م = $\frac{٧}{٢}$ س − س^٢

م$'$ = $\frac{٧}{٢}$ − ٢ س

بوضع م$'$ = ٠

∴ س = $\frac{٧}{٤}$

م$''$ = −٢ كمية سالبة قيمة عظمى

∴ إحداثي النقطة ب هي ($\frac{٧}{٤}$ ، ٠)

٢٢

توجد نقط التقاطع للمنحنيين بحل معادلتيهما

من المعادلة الثانية ص = $\frac{١}{٤}$ س^٢

، في المعادلة الأولى ($\frac{١}{٤}$ س^٢)^٢ = ٤ س

س^٤ = ٦٤ س ∴ س = ٠ أو س = ٤

يتقاطع المنحنيان في نقطتين و (٠ ، ٠) ، حـ (٤ ، ٤)

النقطة ا إحداثيها السيني س = ٢

∴ إحداثيها هو ا (٢ ، ٢ $\sqrt{٢}$)

م = $\frac{١}{٢}$ |Δ| حيث Δ = $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٢\sqrt{٢} & ١ \\ ٤ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$

∴ م = $\frac{١}{٢}$ |$\frac{١}{٤}$ س^٢ − ٢ $\sqrt{٢}$ س| ، ٠ < س < ٤

∴ م = س $\sqrt{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ س^٢ حيث س ∈]٠ ، ٤[

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ = $\sqrt{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ س

بوضع $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ = ٠ ∴ س = ٢ $\sqrt{٢}$

، ∵ $\frac{\text{د}^٢\text{م}}{\text{دس}^٢}$ = −$\frac{١}{٢}$ < ٠ (قيمة عظمى)

∴ عند س = ٢ $\sqrt{٢}$ مثلث ا و ب له أكبر مساحة

∴ أكبر مساحة م = ٢ $\sqrt{٢}$ × ٢ $\sqrt{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ × (٢ $\sqrt{٢}$)^٢

= ٢ وحدة مربعة.

حل آخر

المساحة = $\frac{١}{٢}$ |$\overline{\text{ا ب}}$ × $\overline{\text{ا جـ}}$|

= $\frac{١}{٢}$ |(٢ ، ٢ $\sqrt{٢}$) × (س ، $\frac{١}{٤}$ س^٢)|

= $\frac{١}{٢}$ |$\frac{١}{٤}$ س^٢ − ٢ $\sqrt{٢}$ س| حيث ٠ < س < ٤

ثم نكمل الحل ...

٢٣

① (ب) ② (أ) ③ (ب) ④ (ب)

إرشادات لحل رقم **٢٣**

①

نفرض أن النقطة ا هي (س ، ص)

، ص = $\frac{١}{٢}$ (٦ − س) = ٣ − $\frac{١}{٢}$ س

مساحة المثلث (م) = $\frac{١}{٢}$ × ٢ س × ص

= س (٣ − $\frac{١}{٢}$ س)

= ٣ س − $\frac{١}{٢}$ س^٢

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ = ٣ − $\frac{١}{٢}$ س

، بوضع $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ = ٠ ∴ س = ٦ ، $\frac{\text{د}^٢\text{م}}{\text{دس}^٢}$ = −$\frac{١}{٢}$ < ٠

∴ أكبر مساحة للمثلث = ٣ × ٣ − $\frac{١}{٢}$ × (٣)^٢

= ٣ وحدة مربعة

②

∵ $\overline{\text{ا ب}}$ // محور السينات

∴ نفرض أن ا = (س$_١$ ، ص$_١$) حيث ص$_١$ = ظا س

، ب = (س$_٢$ ، ص$_٢$) حيث ص$_٢$ = ٤ س

∴ ل (طول $\overline{\text{ا ب}}$) = ص$_٢$ − ص$_١$ = ٤ س − ظا س

∴ $\frac{\text{دل}}{\text{دس}}$ = ٤ − قا^٢ س

وبوضع $\frac{\text{دل}}{\text{دس}}$ = ٠

∴ قا^٢ س = ٤ ∴ س = $\frac{\pi}{٣}$

، ∵ $\frac{\text{د}^٢\text{ل}}{\text{دس}^٢}$ < ٠

∴ أكبر قيمة لطول $\overline{\text{ا ب}}$ تتحقق عند س = $\frac{\pi}{٣}$

وتساوي $\frac{\pi}{٣}$ − ظا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{\pi - ٣\sqrt{٣}}{٣}$

③

نفرض أن طول $\overline{\text{هـ ء}}$ = س

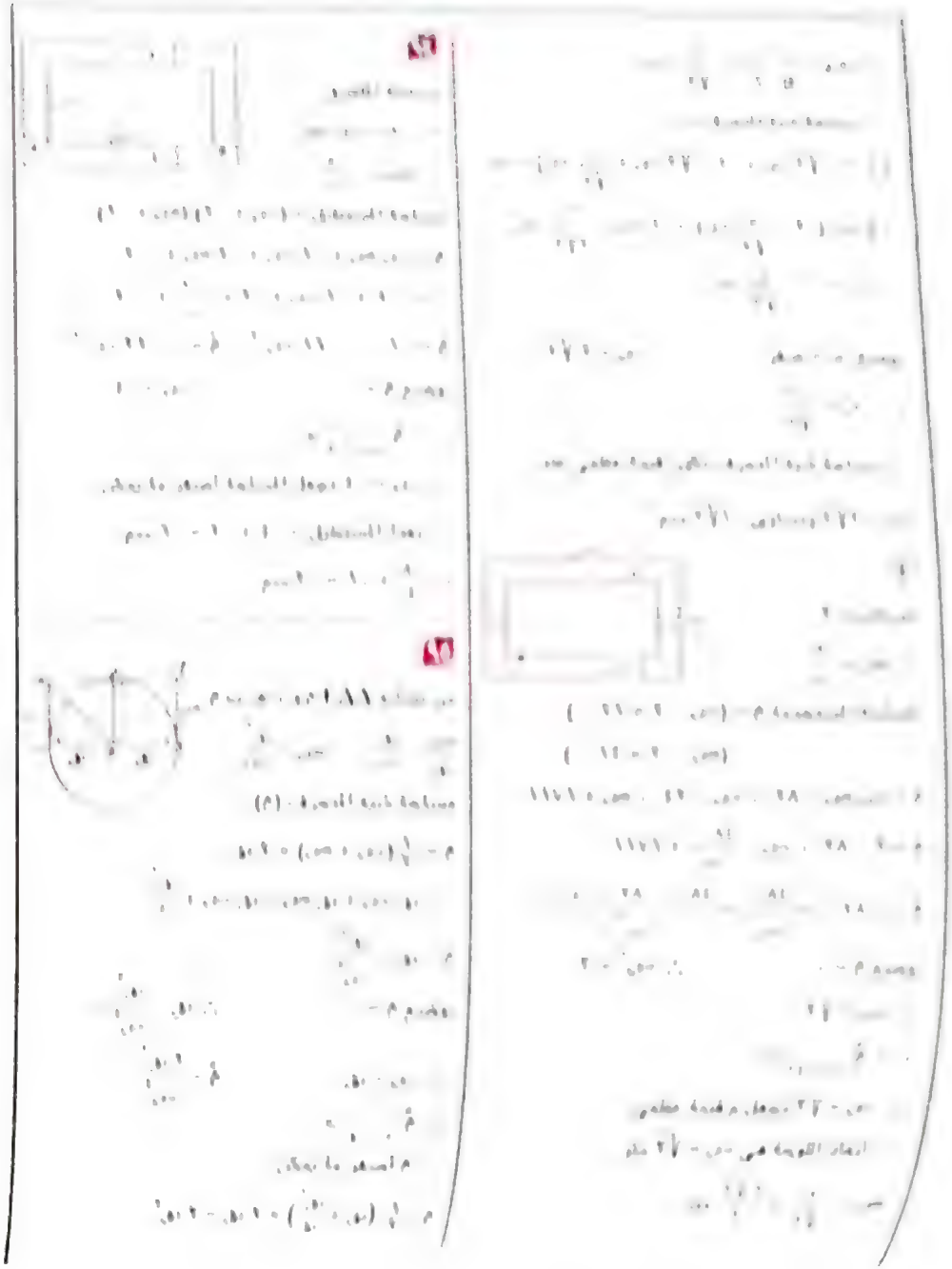
∴ جـ ء = $\frac{\text{س}}{\text{جا ٣٠}}$

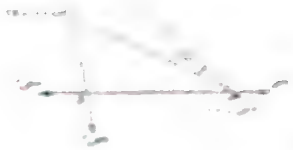
= ٢ س

∴ ب ء = ١٠ − ٢ س

، ق (∠ ا هـ ء) = ق (∠ جـ) = ٣٠°

∴ ق (∠ هـ ء ب) = ٦٠°





نفرض أن

ق (∠ أ حـ ب) = θ

∴ θ = ق (∠ أ حـ و) − ق (∠ ب حـ و)

∴ ظا θ = (ظا (∠ أ حـ و) − ظا (∠ ب حـ و)) / (١ + ظا (∠ أ حـ و) × ظا (∠ ب حـ و))

∴ ظا θ = (٥/س − ١/س) / (١ + ٥/س × ١/س)

∴ ظا θ = (٤/س) / (س + ٥/س)

∴ ظا θ = (٤ س) / (س² + ٣٦)

∴ ظا² θ = (٢ ق θ / ق ١) = (٢ (س² + ٣٦) − ٤ س × ٤ س) / (س² + ٣٦)²

∴ ظا² θ = (٢ ق θ / ق ١) = (−٢ س² + ١٨٠) / (س² + ٣٦)²

وبوضع ق θ / ق س = ٠ ∴ −٢ س² + ١٨٠ = ٠

∴ س² = ٩٠

∴ س = ± ٦

∴ حـ ∈ و س

∴ س = ٦ ∴ حـ (٦ ، ٠)

θ أكبر ما يمكن عندما س = ٦

إحداثي حـ لتكون θ أكبر ما يمكن هي (٦ ، ٠)

مثلث أ ب حـ متساوي الساقين

∵ أ ب = أ حـ ويساويه

∴ أ و ⊥ ب حـ

∴ بفرض أ و = س سم

∴ أ ب = (١٥ + س) سم

∴ ب و = √(٢٢٥ − س²) سم

∴ مساحة Δ أ ب حـ (م)

= ½ ب حـ × أ و = ب و × أ و

= √(٢٢٥ − س²) × (١٥ + س)

∴ ق م / ق س = √(٢٢٥ − س²) − (١٥ + س) س / √(٢٢٥ − س²)

= (٢٢٥ − س² − ١٥ س) / √(٢٢٥ − س²)

وبوضع ق م / ق س = ٠

∴ ٢ س² + ١٥ س − ٢٢٥ = ٠

∴ (٢ س − ١٥) (س + ١٥) = ٠

∴ س = ١٥/٢ أو س = −١٥ (مرفوض)

∴ إشارة م′ تتغير على جانبي س = ١٥/٢

من الموجب إلى السالب

∴ مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن

∴ مساحة المثلث = √(٢٢٥ − (١٥/٢)²) × (١٥ + ١٥/٢)

= ٦٧٥/٤ √٣ سم² = ٢٩٢,٢٨ سم²

حل آخر :

∵ Δ أ م ب ≡ Δ أ م حـ

∴ ق (∠ أ م ب)

= ق (∠ أ م حـ) = هـ

∴ ق (∠ ب م حـ) = (٣٦٠° − ٢ هـ)

∴ م = ½ نق² ما هـ + ½ نق² ما هـ

+ ½ نق² ما (٣٦٠° − ٢ هـ)

= نق² ما هـ − ½ نق² ما ٢ هـ

∴ ق م / ق هـ = نق² ما هـ − ½ نق² × ٢ ما ٢ هـ

= نق² (ما هـ − ما ٢ هـ)

∵ ق م / ق هـ = ٠ ∴ ما هـ − ما ٢ هـ = ٠

∴ ما هـ − (٢ ما² هـ − ١) = ٠

∴ ٢ ما² هـ − ما هـ − ١ = ٠

∴ (٢ ما هـ + ١) (ما هـ − ١) = ٠

∴ ما هـ = ١ ∴ هـ = صفر (مرفوض)

أو ما هـ = −½ ∴ هـ = ١٢٠° = ٢π/٣

∴ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع

∵ ق م / ق هـ = −نق² ما هـ + ٢ نق² ما ٢ هـ

∴ م′ (٢π/٣) = √٣/٢ نق² + ٢ نق² (−√٣/٢)

= −٣√٣/٢ نق² < صفر

∴ مساحة المثلث أكبر ما يمكن

∵ مساحة المثلث = نق² ما ١٢٠ − ½ نق² ما ٢٤٠

= √٣/٢ نق² + √٣/٤ نق² = ٣√٣/٤ نق²

وعندما نق = ١٥

∴ مساحة المثلث = ٣√٣/٤ × (١٥)² = ٦٧٥/٤ √٣ سم²

≈ ٢٩٢,٢٨ سم²

١٠١

من الشكل

ل = √(س² + ٤) + √(س² + ٤)

من التشابه

س/٢ = ٢/س

∴ ص = ٤/س

∴ ل = √(س² + ٤) + √((٤/س)² + ٤)

= √(س² + ٤) + ٢/س √(٤ + س²)

= √(س² + ٤) × (١ + ٢/س)

ل′ = ٢/س √(س² + ٤) + ٢س/(٢√(س² + ٤)) (١ + ٢/س)

= (−٢ (س² + ٤) + س (س² + ٢س)) / (س² √(س² + ٤))

= (−٢س² − ٨ + س³ + ٢س²) / (س² √(س² + ٤)) = (س³ − ٨) / (س² √(س² + ٤))

ل′ = ٠

∴ س = ٢ قيمة صغرى

أقل طول للسلم ل عند س = ٢ = √(٤ + ٤) × (١ + ٢/٢)

= ٤ √٢ متر.

١٠٢

ص₁ = ١٢ − س² صفر < س < ٢√٣

ص₂ = س² − ١٢ صفر < س < ٢√٣

∴ بعدا المستطيل = ٢ س أفقيًا

، رأسيًا = ص₁ − ص₂ = (١٢ − س²) − (س² − ١٢)

= ١٢ − س² + ١٢ − س²

= ٢٤ − ٢ س²

١٣

[illegible]

... ∴ حجم الكأس = ... ، حجم الماء ...

[illegible]

١٢

[illegible]

∴ أكبر ما يمكن

ص = ... (½) + ٢٤ = ٨ سم

١٤

س² + ص² = ١

ص = √(١ − س²)

حجم المخروط = ⅓ π ص² × (١ + س)

ح = ⅓ π (١ − س²) (١ + س)

= ⅓ π (١ + ١ س − س² − س³)

∴ ح′ = ⅓ π (١ − ٢ س − ٣ س²)

ح′ = ٠ ⟸ (١ + س) (١ − ٣ س) = ٠

∴ س = − ١ (مرفوض) ، س = ⅓

[illegible]

حجم الكرة = ⁴⁄₃ π ...

النسبة بينهما = ... = ٨/٢٧

١٧

ز₁ (المسافة هـ ٥) = √(٢٥ + س²) / ٢ = ½ √(٢٥ + س²)

ز₂ (المسافة س ب) = (٦ − س) / ٤ = ¼ (٦ − س)

ز = ز₁ + ز₂ = ½ √(٢٥ + س²) + ¼ (٦ − س)

ز′ = ½ × ٢ س / (٢ √(٢٥ + س²)) − ¼

س / (٢ √(٢٥ + س²)) = ¼

ز′ = ٠ فإن س / (٢ √(٢٥ + س²)) = ¼

∴ ٢ س = √(٢٥ + س²) بالتربيع

٤ س² = ٢٥ + س²   ∴ ٣ س² = ٢٥

س = ٥√٣ / ٣ ≈ ٢.٩ متر

ز″ > ٠ ∴ قيمة صغرى عند س = ٥√٣ / ٣

∴ يجب على الرجل أن يرسو على مسافة ٥√٣ / ٣ متر من نقطة أ

إجابات تمارين التكاملات الغير محددة

١

(١) $\int ٥ \, ءس = ٥ س + ث$

(٢) $\int (س - ٣)(٢س + ٧) \, ءس$

$= \int (٢س^{٢} + س - ٢١) \, ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} - ٢١ س + ث$

(٣) $\int (س^{٢} + ٥س + \frac{١}{س}) \, ءس$

$= \int (س^{٢} + ٥س + س^{-٢}) \, ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{٥}{٢} س^{٢} - س^{-١} + ث$

(٤) $\int \frac{١٢ س^{٤} + ٣}{س} \, ءس$

$= \int (١٢ س^{٣} + ٣ س^{-٢}) \, ءس$

$= ٤ س^{٣} - ٣ س^{-١} + ث$

(٥) $\int (س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}) \, ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢ س^{\frac{١}{٢}} - ٢ س^{-\frac{١}{٢}} + ث$

(٦) $\int \frac{س - ١}{\sqrt{س}} \, ءس = \int (س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}) \, ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + ث$

(٧) $\int (٢س + ٣)^{٣} \, ءس = \frac{(٢س + ٣)^{٤}}{٢ \times ٤} + ث$

$= \frac{١}{٨} (٢س + ٣)^{٤} + ث$

(٨) $\int (٥ - ٣س)^{٤} \, ءس = \frac{(٥ - ٣س)^{٥}}{٥ \times -٣} + ث$

$= \frac{-١}{١٥} (٥ - ٣س)^{٥} + ث$

(٩) $\int \sqrt{٤س - ١} \, ءس = \int (٤س - ١)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{(٤س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٦} (٤س - ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(١٠) $\int \sqrt[٣]{٣س + ١} \, ءس$

$= \int (٣س + ١)^{\frac{١}{٣}} \, ءس$

$= \frac{(٣س + ١)^{\frac{٤}{٣}}}{٣ \times \frac{٤}{٣}} + ث = \frac{١}{٤} (٣س + ١)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

(١١) $\int \frac{ءس}{\sqrt{٣ - ٥س}} = \int (٣ - ٥س)^{-\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{(٣ - ٥س)^{\frac{١}{٢}}}{-٥ \times \frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{-٢}{٥} (٣ - ٥س)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(١٢) $\int \frac{ءس}{(٣س - ٤)^{٦}} = \int (٣س - ٤)^{-٦} \, ءس$

$= \frac{(٣س - ٤)^{-٥}}{-٥ \times ٣} + ث = \frac{-١}{١٥} (٣س - ٤)^{-٥} + ث$

(١٣) $\int (هـ^{٥س + ١} + ٢س + ٣) \, ءس$

$= \frac{١}{٥} هـ^{٥س + ١} + \frac{٢س}{لو_{هـ} ٢} + ٣س + ث$

(١٤) $\int (\frac{٥}{س} + هـ^{س}) \, ءس$

$= ٥ لو_{هـ} |س| + هـ^{س} + ث$

(١٥) $\int ٨ س^{٦} (٥ - \frac{٢}{س})^{٦} \, ءس$

$= ٨ \int (٥س - ٢)^{٦} \, ءس$

$= ٨ \times \frac{(٥س - ٢)^{٧}}{٥ \times ٧} + ث$

$= \frac{٨}{٣٥} (٥س - ٢)^{٧} + ث$

(١٦) $\int (٩س^{٢} - ٦س + ١)^{٥} \, ءس$

$= \int [(٣س - ١)^{٢}]^{٥} \, ءس$

$= \int (٣س - ١)^{١٠} \, ءس$

$= \frac{(٣س - ١)^{١١}}{٣ \times ١١} + ث$

$= \frac{١}{٣٣} (٣س - ١)^{١١} + ث$

(١٧) $\int س \sqrt{\frac{٥}{س} - \frac{٣}{س^{٢}}} \, ءس$

$= \int \sqrt{٥س - ٣} \, ءس = \int (٥س - ٣)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{(٥س - ٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٥ \times \frac{٣}{٢}} + ث = \frac{٢}{١٥} (٥س - ٣)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(١٨) $\int س \sqrt[٣]{\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٢}}} \, ءس = \int \sqrt[٣]{٢ - س} \, ءس$

$= \int (٢ - س)^{\frac{١}{٣}} \, ءس = \frac{(٢ - س)^{\frac{٤}{٣}}}{-١ \times \frac{٤}{٣}} + ث$

$= \frac{-٣}{٤} (٢ - س)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

٢

(١) $ص = ٣س^{٢} - ١$ $\therefore ءص = ٦س \, ءس$

(٢) $ص = (٢س + ٥)^{٤}$

$\therefore ءص = ٤ (٢س + ٥)^{٣} \times ٢ \, ءس$

$= ٨ (٢س + ٥)^{٣} \, ءس$

(٣) $ص = هـ^{٢س - ٢}$

$\therefore ءص = ٢ هـ^{٢س - ٢} \, ءس$

(٤) $ص = \frac{س}{س - ١}$

$\therefore ءص = \frac{(س - ١)(١) - س(١)}{(س - ١)^{٢}} \, ءس$

$= \frac{-١}{(س - ١)^{٢}} \, ءس$

(٥) $ح = \frac{٤}{٣} \pi نق^{٣}$ $\therefore ءح = \frac{٨}{٣} \pi نق \, ءنق$

(٦) $ص = \sqrt{(٢س + ٣)^{٥}} = (٢س + ٣)^{\frac{٥}{٢}}$

$\therefore ءص = \frac{٥}{٢} (٢س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} \times ٢ \, ءس$

$= ٥ (٢س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} \, ءس$

(٧) $ص = (س + \frac{١}{س})^{٣}$

$\therefore ءص = ٣ (س + \frac{١}{س})^{٢} \times (١ - \frac{١}{س^{٢}}) \, ءس$

(٨) $ص = هـ^{س^{٢} + ٢س}$

$\therefore ءص = هـ^{س^{٢} + ٢س} \times (٢س + ٢) \, ءس$

(٩) $ص = هـ^{جا ٢س}$

$\therefore ءص = هـ^{جا ٢س} \times - جا ٢س \times ٢ \, ءس$

$= - ٢ جا ٢س . هـ^{جا ٢س} \, ءس$

(١٠) $ع = لو_{هـ} (س^{٢} + ١)$

$\therefore ءع = \frac{١}{س^{٢} + ١} \times ٢س \, ءس$

$= \frac{٢س}{س^{٢} + ١} \, ءس$

(١١) $ع = (لو_{هـ} \frac{١٠}{س})^{٢}$

$\therefore ءع = ٢ (لو_{هـ} \frac{١٠}{س}) \times \frac{١}{(\frac{١٠}{س})} \times \frac{-١٠}{س^{٢}} \, ءس$

$= \frac{-٢}{س} لو_{هـ} \frac{١٠}{س} \, ءس$

(١٢) $ع = لو_{هـ} ظا (٣س - ١)$

$\therefore ءع = \frac{- قا^{٢} (٣س - ١) \times ٣}{ظا (٣س - ١)} \, ءس$

$= \frac{-٣ قا^{٢} (٣س - ١)}{ظا (٣س - ١)} \, ءس$

٣

(١) $ص = ع . ل$ $\therefore ءص = ع . ءل + ل . ءع$

(٢) $ص = \frac{ع}{ل}$ $\therefore ءص = \frac{ل . ءع - ع . ءل}{ل^{٢}}$

٤

$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

$\therefore ٢س . ءس + ٢ص . ءص = ٠$

$\therefore ءص = \frac{-٢س \, ءس}{٢ص}$

$\therefore ءص = - \frac{س}{ص} . ءس$

حساب التكامل

١

(١) $\int ٢\text{س}\,(\text{س}^٢ + ٣)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء س}$

بوضع $\text{ع} = \text{س}^٢ + ٣$ ∴ $\text{ء ع} = ٢\text{س}\,\text{ء س}$

∴ $\text{ء س} = \frac{\text{ء ع}}{٢\text{س}}$

∴ التكامل $= \int ٢\text{س} \times \text{ع}^{\frac{١}{٢}} \times \frac{\text{ء ع}}{٢\text{س}}$

$= \int \frac{٢}{٢}\,\text{ع}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء ع}$

$= \frac{٢}{٢} \times \frac{\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{٢}{٣}\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣}\,(\text{س}^٢ + ٣)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{س}^٣\,(٢\text{س}^٤ - ٧)^٥\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٨} \int ٨\text{س}^٣\,(٢\text{س}^٤ - ٧)^٥\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{(٢\text{س}^٤ - ٧)^٦}{٦} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٤٨}\,(٢\text{س}^٤ - ٧)^٦ + \text{ث}$

(٣) $\int (\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١)^{-٣} \times (\text{س} - ٢)\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int (٢\text{س} - ٤)\,(\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١)^{-٣}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١)^{-٢}}{-٢} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٤}\,(\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١)^{-٢} + \text{ث}$

(٤) $\int (١ - \text{س}^٢)\,(٣\text{س} - \text{س}^٣)^٥\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int (٣ - ٣\text{س}^٢)\,(٣\text{س} - \text{س}^٣)^٥\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(٣\text{س} - \text{س}^٣)^٦}{٦} + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٢}\,(٣\text{س} - \text{س}^٣)^٦ + \text{ث}$

(٥) $\int \text{س}\sqrt{\text{س}^٢ + ١}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int ٢\text{س}\,(\text{س}^٢ + ١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\,(\text{س}^٢ + ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{س}^٢ + ٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٣}{٨}\,(\text{س}^٢ + ٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٧) $\int \frac{\text{س}^٢}{(\text{س}^٣ - ٤)^٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \int ٣\text{س}^٢\,(\text{س}^٣ - ٤)^{-٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(\text{س}^٣ - ٤)^{-٤}}{-٤} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{١٢}\,(\text{س}^٣ - ٤)^{-٤} + \text{ث}$

(٨) $\int \frac{\text{س}^٤}{(\text{س}^٥ + ١)^٧}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٥} \int ٥\text{س}^٤\,(\text{س}^٥ + ١)^{-٧}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٥} \times \frac{(\text{س}^٥ + ١)^{-٦}}{-٦} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٣٠}\,(\text{س}^٥ + ١)^{-٦} + \text{ث}$

(٩) $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}^٢ + ٨)^٣}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int (٢\text{س})\,(\text{س}^٢ + ٨)^{-٣}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{س}^٢ + ٨)^{-٢}}{-٢} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٤}\,(\text{س}^٢ + ٨)^{-٢} + \text{ث}$

(١٠) $\int \frac{\text{س}^٢ + ١}{(\text{س}^٣ + ٣\text{س})^٦}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \int (٣\text{س}^٢ + ٣)\,(\text{س}^٣ + ٣\text{س})^{-٦}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(\text{س}^٣ + ٣\text{س})^{-٥}}{-٥} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{١٥}\,(\text{س}^٣ + ٣\text{س})^{-٥} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^٢ - ١}\,\text{ء س}$

$= \frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|٣\text{س}^٢ - ١| + \text{ث}$

(١٢) $\int \frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٣ + ٥}\,\text{ء س} = \frac{١}{٣} \int \frac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣ + ٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{س}^٣ + ٥| + \text{ث}$

(١٣) $\int \frac{٢\text{ص}^٣}{\text{ص}^٤ + ٥}\,\text{ء ص} = \frac{١}{٢} \int \frac{٤\text{ص}^٣}{\text{ص}^٤ + ٥}\,\text{ء ص}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{ص}^٤ + ٥| + \text{ث}$

(١٤) $\int \frac{١٢\text{س} - ٢٠}{٣\text{س}^٢ + \text{س} + ٧}\,\text{ء س}$

$= ٢ \int \frac{٦\text{س} + ١}{٣\text{س}^٢ + \text{س} + ٧}\,\text{ء س}$

$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|٣\text{س}^٢ + \text{س} + ٧| + \text{ث}$

(١٥) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{١ + ٣\text{س}^٢}}\,\text{ء س} = \frac{١}{٦} \int \frac{٦\text{س}}{\sqrt{١ + ٣\text{س}^٢}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٦} \times ٢\sqrt{١ + ٣\text{س}^٢} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣}\sqrt{١ + ٣\text{س}^٢} + \text{ث}$

(١٦) $\int \frac{\text{س}^٣}{\sqrt{٢\text{س}^٤ + ٣}}\,\text{ء س} = \frac{١}{٨} \int \frac{٨\text{س}^٣}{\sqrt{٢\text{س}^٤ + ٣}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٨} \times ٢\sqrt{٢\text{س}^٤ + ٣} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٤}\sqrt{٢\text{س}^٤ + ٣} + \text{ث}$

(١٧) $\int \frac{\text{س}^٢ + ١}{\sqrt{\text{س}^٣ + ٣\text{س} + ٥}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \int \frac{٣\text{س}^٢ + ٣}{\sqrt{\text{س}^٣ + ٣\text{س} + ٥}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \times ٢\sqrt{\text{س}^٣ + ٣\text{س} + ٥} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^٣ + ٣\text{س} + ٥} + \text{ث}$

$= \int (٢\text{س} - ٥)\,(\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٧)^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ء س}$

$= \frac{(\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٧)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= ٢\,(\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٧)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

(١٩) $\int \frac{١}{\text{س}^٢}\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^٣\,\text{ء س}$

$= -\int \left(\frac{-١}{\text{س}^٢}\right)\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^٣\,\text{ء س}$

$= \frac{-\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^٤}{٤} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٤}\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^٤ + \text{ث}$

(٢٠) $\int \frac{\text{ء س}}{\sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}} + ٢)^٥}$

$= ٢ \int \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} \times (\sqrt{\text{س}} + ٢)^{-٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{٢\,(\sqrt{\text{س}} + ٢)^{-٤}}{-٤} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٢}\,(\sqrt{\text{س}} + ٢)^{-٤} + \text{ث}$

(٢١) $\int \frac{(\sqrt{\text{س}} + ٣)^٥}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ء س}$

$= ٢ \int \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\,(\sqrt{\text{س}} + ٣)^٥\,\text{ء س}$

$= \frac{٢\,(\sqrt{\text{س}} + ٣)^٦}{٦} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣}\,(\sqrt{\text{س}} + ٣)^٦ + \text{ث}$

(٢٢) $\int \sqrt{\frac{١ + \sqrt{\text{س}}}{\text{س}}}\,\text{ء س} = \int \frac{(١ + \sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ء س}$

$= ٢ \int \left(\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\right)(١ + \sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء س}$

$= ٢ \times \frac{(١ + \sqrt{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٤}{٣}\,(١ + \sqrt{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٢٢) $\int (٢\text{س} - ٣)^{٢} (٤\text{س} + ١)^{٢} (٨\text{س} - ٥)\, \text{ء س}$

$= \int (٨\text{س} - ٥)(٨\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} - ٣)^{٢}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int (١٦\text{س} - ١٠)(٨\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} - ٣)^{٢}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(٨\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} - ٣)^{٣}}{٣} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٦} (٨\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} - ٣)^{٣} + \text{ث}$

(٢٣) $\int \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١}\, (\text{س} - ١)^{٢}\, \text{ء س}$

$= \int (\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)$

$(\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١)^{\frac{١}{٢}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int (٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٢)$

$(\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١)^{\frac{١}{٢}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣} (\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

٢

(١) $\int \text{س} (\text{س} - ٥)^{٢}\, \text{ء س}$

بوضع ع = س − ٥ ∴ س = ع + ٥

ء س = ء ع

∴ $\int \text{س} (\text{س} - ٥)^{٢}\, \text{ء س}$

$= \int (\text{ع} + ٥)(\text{ع})^{٢}\, \text{ء ع}$

$= \int (\text{ع}^{٣} + ٥\text{ع}^{٢})\, \text{ء ع}$

$= \frac{١}{٤} \text{ع}^{٤} + \frac{٥}{٣} \text{ع}^{٣} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٤} (\text{س} - ٥)^{٤} + \frac{٥}{٣} (\text{س} - ٥)^{٣} + \text{ث}$

حل آخر:

$\int \text{س} (\text{س} - ٥)^{٢}\, \text{ء س}$

$= \int [(\text{س} - ٥) + ٥] (\text{س} - ٥)^{٢}\, \text{ء س}$

$= \int [(\text{س} - ٥)^{٣} + ٥ (\text{س} - ٥)^{٢}]\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٤} (\text{س} - ٥)^{٤} + \frac{٥}{٣} (\text{س} - ٥)^{٣} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{س} (٢\text{س} + ٣)^{٢}\, \text{ء س}$

بوضع ع = ٢س + ٣ ∴ س = $\frac{١}{٢}$ (ع − ٣)

∴ ء ع = ٢ء س ∴ ء س = $\frac{١}{٢}$ ء ع

∴ $\int \text{س} (٢\text{س} + ٣)^{٢}\, \text{ء س}$

$= \int \frac{١}{٢} (\text{ع} - ٣)(\text{ع})^{٢} \times \frac{١}{٢}\, \text{ء ع}$

$= \int (\frac{١}{٢} \text{ع}^{٣} - \frac{٣}{٢} \text{ع}^{٢})\, \text{ء ع}$

$= \frac{١}{٨} \text{ع}^{٤} - \frac{٣}{١٢} \text{ع}^{٣} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٨} (٢\text{س} + ٣)^{٤} - \frac{٣}{١٢} (٢\text{س} + ٣)^{٣} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{س} \sqrt{\text{س} + ٤}\, \text{ء س}$ بوضع ع = س + ٤

∴ س = ع − ٤ ∴ ء س = ء ع

∴ $\int \text{س} \sqrt{\text{س} + ٤}\, \text{ء س}$

$= \int (\text{ع} - ٤) \sqrt{\text{ع}}\, \text{ء ع}$

$= \int (\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} - ٤\text{ع}^{\frac{١}{٢}})\, \text{ء ع}$

$= \frac{٢}{٥} \text{ع}^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣} \text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٥} (\text{س} + ٤)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣} (\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٤) $\int \text{س} \sqrt{٢\text{س} + ٥}\, \text{ء س}$ بوضع ع = ٢س + ٥

∴ س = $\frac{١}{٢}$ (ع − ٥) ∴ ء س = $\frac{١}{٢}$ ء ع

∴ $\int \text{س} \sqrt{٢\text{س} + ٥}\, \text{ء س}$

$= \int \frac{١}{٢} (\text{ع} - ٥) \sqrt{\text{ع}} \times \frac{١}{٢}\, \text{ء ع}$

$= \int (\frac{١}{٢} \text{ع}^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٥}{٢} \text{ع}^{\frac{١}{٢}})\, \text{ء ع}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٥} \text{ع}^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٥}{٢} \times \frac{٢}{٣} \text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٥} \text{ع}^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٥}{٣} \text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٥} (٢\text{س} + ٥)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٥}{٣} (٢\text{س} + ٥)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٥) $\int \text{س}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٣} + ٢}\, \text{ء س}$ بوضع ع = $\sqrt{\text{س}^{٣} + ٢}$

∴ س = ع² − ٢ ∴ ء س = ٢ع ء ع

∴ $\int \text{س}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٣} + ٢}\, \text{ء س}$

$= \int (\text{ع}^{٢} - ٢)^{٢} \cdot \text{ع} \cdot ٢\text{ع}\, \text{ء ع}$

$= \int (\text{ع}^{٢} - ٢)^{٢} \times ٢\text{ع}^{٢}\, \text{ء ع}$

$= \int ٢\text{ع}^{٢} (\text{ع}^{٤} - ٤\text{ع}^{٢} + ٤)\, \text{ء ع}$

$= \int (٢\text{ع}^{٦} - ٨\text{ع}^{٤} + ٨\text{ع}^{٢})\, \text{ء ع}$

$= \frac{٢}{٧} \text{ع}^{٧} - \frac{٨}{٥} \text{ع}^{٥} + \frac{٨}{٣} \text{ع}^{٣} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٧} (\text{س} + ٢)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٨}{٥} (\text{س} + ٢)^{\frac{٥}{٢}}$

$+ \frac{٨}{٣} (\text{س} + ٢)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٦) $\int (\text{س}^{٢} - ١) \sqrt[٣]{\text{س} + ١٠}\, \text{ء س}$

بوضع ع = $\sqrt[٣]{\text{س} + ١٠}$ ∴ س = ع³ − ١٠

∴ ء س = ٣ع² ء ع

∴ $\int (\text{س}^{٢} - ١) \sqrt[٣]{\text{س} + ١٠}\, \text{ء س}$

$= \int ((\text{ع}^{٣} - ١٠)^{٢} - ١) \cdot \text{ع} \cdot ٣\text{ع}^{٢}\, \text{ء ع}$

$= \int (\text{ع}^{٦} - ٢\text{ع}^{٣}) \times ٣\text{ع}^{٢}\, \text{ء ع}$

$= \int (٣\text{ع}^{٨} - ٦\text{ع}^{٥})\, \text{ء ع}$

$= \frac{٣}{٩} \text{ع}^{٩} - \frac{٦}{٦} \text{ع}^{٦} + \text{ث}$

$= \frac{٣}{٩} (\text{س} + ١٠)^{٣} - \frac{١}{٢} (\text{س} + ١٠)^{٢} + \text{ث}$

(٧) $\int \text{س}^{٢} \sqrt{\text{س} - ٣}\, \text{ء س}$ بوضع ع = $\sqrt{\text{س} - ٣}$

∴ س = ع² + ٣ ∴ ء س = ٢ع ء ع

∴ $\int \text{س}^{٢} \sqrt{\text{س} - ٣}\, \text{ء س}$

$= \int (\text{ع}^{٢} + ٣)^{٢} \times \text{ع} \cdot ٢\text{ع}\, \text{ء ع}$

$= \int ٢\text{ع}^{٢} (\text{ع}^{٤} + ٦\text{ع}^{٢} + ٩)\, \text{ء ع}$

$= \int (٢\text{ع}^{٦} + ١٢\text{ع}^{٤} + ١٨\text{ع}^{٢})\, \text{ء ع}$

$= \frac{٢}{٧} \text{ع}^{٧} + \frac{١٢}{٥} \text{ع}^{٥} + \frac{١٨}{٣} \text{ع}^{٣} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٧} (\text{س} - ٣)^{\frac{٧}{٢}} + \frac{١٢}{٥} (\text{س} - ٣)^{\frac{٥}{٢}}$

$+ \frac{١٨}{٣} (\text{س} - ٣)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٨) $\int \text{س}^{٢} \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}\, \text{ء س}$

بوضع ع = ١ − س² ∴ س² = ١ − ع

∴ س = $\sqrt{١ - \text{ع}}$

∴ ء س = − $\frac{١}{٢}$ (١ − ع)^{−½} ء ع

∴ $\int \text{س}^{٢} \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}\, \text{ء س}$

$= \int (١ - \text{ع})^{٢} \times \sqrt{\text{ع}} \times \frac{١}{٢} (١ - \text{ع})^{-\frac{١}{٢}}\, \text{ء ع}$

$= \frac{١}{٢} \int (١ - \text{ع})\, \text{ع}^{\frac{١}{٢}}\, \text{ء ع}$

$= \frac{١}{٢} \int (\text{ع}^{\frac{١}{٢}} - \text{ع}^{\frac{٣}{٢}})\, \text{ء ع}$

$= \frac{١}{٢} \int (\frac{٢}{٣} \text{ع}^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٥} \text{ع}^{\frac{٥}{٢}}) + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣} \text{ع}^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٥} \text{ع}^{\frac{٥}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣} (١ - \text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٥} (١ - \text{س}^{٢})^{\frac{٥}{٢}} + \text{ث}$

(٩) $\int \text{س}^{٢} \sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} - ١)}\, \text{ء س}$

بوضع ع = س² − ١ ∴ س² = ع + ١

∴ ٢س ء س = ء ع

∴ $\int \text{س}^{٢} \sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} - ١)} \cdot \text{س}\, \text{ء س}$

$= \int (\text{ع} + ١) \text{ع}^{\frac{١}{٣}} \times \frac{١}{٢}\, \text{ء ع}$

$= \frac{١}{٢} \int (\text{ع}^{\frac{٤}{٣}} + \text{ع}^{\frac{١}{٣}})\, \text{ء ع}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{١٧} \text{ع}^{\frac{١٧}{٣}} + \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٤} \text{ع}^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$

$= \frac{٣}{١٧} \text{ع}^{\frac{١٧}{٣}} + \frac{٣}{٨} \text{ع}^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$

$= \frac{٣}{١٧} (\text{س}^{٢} - ١)^{\frac{١٧}{٣}} + \frac{٣}{٨} (\text{س}^{٢} - ١)^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$

(١٠) $\int \text{س}^{٢} (\text{س}^{٣} + ٢)^{٢}\, \text{ء س}$

بوضع ع = س³ + ٢ ∴ س³ = ع − ٢

∴ ء ع = ٣س² ء س

∴ $\int \text{س}^{٢} (\text{س}^{٣} + ٢)^{٢}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \int (\text{س}^{٣})^{٢} (\text{س}^{٣} + ٢)^{٢} \times ٣\text{س}^{٢}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \int (\text{ع} - ٢)^{٢} \cdot \text{ع}^{٢} \times \text{ء ع}$

$= \frac{١}{٣} \int (\text{ع}^{٤} - ٤\text{ع}^{٣} + ٤\text{ع}^{٢})\, \text{ء ع}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٥} \text{ع}^{٥} - \frac{١}{٣} \times ٤ \times \frac{١}{٤} \text{ع}^{٤}$

$+ \frac{١}{٣} \times ٤ \times \frac{١}{٣} \text{ع}^{٣} + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٥} \text{ع}^{٥} - \frac{١}{٣} \text{ع}^{٤} + \frac{٤}{٩} \text{ع}^{٣} + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٥} (\text{س}^{٣} + ٢)^{٥} - \frac{١}{٣} (\text{س}^{٣} + ٢)^{٤}$

$+ \frac{٤}{٩} (\text{س}^{٣} + ٢)^{٣} + \text{ث}$

٦

$\therefore \int \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}} - \int ٢\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}} + \int ٢\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}} + ٢\, \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$\text{س}^{٢}$	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٢س	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٢	$\text{هـ}^{\text{س}}$
صفر	$\text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \int \text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \text{س}\, \frac{١}{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جا}\, ٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جا}\, ٢\text{س} + \frac{١}{٤}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س	$\text{جتا}\, ٢\text{س}$
١	$\frac{١}{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$
صفر	$-\frac{١}{٤}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}$

$\therefore \int \text{س}^{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جا}\, ٢\text{س} + \int \frac{١}{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٤}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$\text{س}^{٢}$	$\text{جتا}\, ٢\text{س}$
٢س	$\frac{١}{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$
٢	$-\frac{١}{٤}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}$
صفر	$-\frac{١}{٨}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$

$\therefore \int \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \frac{١}{٢}\, ٢\text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \int \frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$\text{س}^{٢}$	$\text{هـ}^{٢\text{س}}$
٢س	$\frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
٢	$\frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
صفر	$\frac{١}{٨}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\therefore \int \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}} - \int ٢\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}} + \int ٢\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}} + ٢\, \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$\text{س}^{٢}$	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٢س	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٢	$\text{هـ}^{\text{س}}$
صفر	$\text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \int (\text{س} + ١)^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, (\text{س} + ١)^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \frac{١}{٢}\, (\text{س} + ١)\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, (\text{س} + ١)^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$(\text{س} + ١)^{٢}$	$\text{هـ}^{٢\text{س}}$
$٢(\text{س} + ١)$	$\frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
٢	$\frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
صفر	$\frac{١}{٨}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\therefore \int (\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}})^{٢}\, \text{ء س}$

$= \int \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \frac{١}{٢}\, ٢\text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \int \frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}}$	
$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}}$
$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\frac{١}{٨}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\therefore \int \text{س}\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \text{س}\, \frac{١}{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٤}\, \text{جا}\, ٢\text{س} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س	$\text{جا}\, ٢\text{س}$
١	$-\frac{١}{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}$
صفر	$-\frac{١}{٤}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$

$\therefore \int \text{س}^{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\, ٢\text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \int \text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جا}\, ٢\text{س} + \int \frac{١}{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٤}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$\text{س}^{٢}$	$\text{جتا}\, ٢\text{س}$
٢س	$\frac{١}{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$
٢	$-\frac{١}{٤}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}$
صفر	$-\frac{١}{٨}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$

$\therefore \int \text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س	$\text{هـ}^{\text{س}}$
١	$\text{هـ}^{\text{س}}$
صفر	$\text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \int \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}\, \frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س	$\text{هـ}^{٢\text{س}}$
١	$\frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
صفر	$\frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\therefore \int (\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}})^{٢}\, \text{ء س}$

$= \int \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \frac{١}{٢}\, ٢\text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \int \frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$\text{س}^{٢}$	$\text{هـ}^{٢\text{س}}$
٢س	$\frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
٢	$\frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
صفر	$\frac{١}{٨}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\therefore \int \text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س	$\text{هـ}^{\text{س}}$
١	$\text{هـ}^{\text{س}}$
صفر	$\text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \int \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \text{س}\, \frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س	$\text{هـ}^{٢\text{س}}$
١	$\frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
صفر	$\frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\therefore \int (\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}})^{٢}\, \text{ء س}$

$= \int \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \frac{١}{٢}\, ٢\text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \int \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \int \frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$\text{س}^{٢}$	$\text{هـ}^{٢\text{س}}$
٢س	$\frac{١}{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
٢	$\frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$
صفر	$\frac{١}{٨}\, \text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\therefore \int \text{س}\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \text{س}\, \frac{١}{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٤}\, \text{جا}\, ٢\text{س} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س	$\text{جا}\, ٢\text{س}$
١	$-\frac{١}{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}$
صفر	$-\frac{١}{٤}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$

$\therefore \int \text{س}^{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\, ٢\text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \int \text{س}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جا}\, ٢\text{س} + \int \frac{١}{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\, \text{س}^{٢}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٢}\, \text{س}\, \text{جا}\, ٢\text{س} - \frac{١}{٤}\, \text{جتا}\, ٢\text{س} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$\text{س}^{٢}$	$\text{جتا}\, ٢\text{س}$
٢س	$\frac{١}{٢}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$
٢	$-\frac{١}{٤}\, \text{جتا}\, ٢\text{س}$
صفر	$-\frac{١}{٨}\, \text{جا}\, ٢\text{س}$

⑧

$\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}}$	$(٢\text{س} + ١٠)$
$\text{هـ}^{\text{س}}$	$(٢\text{س} + ١٠)$
$\text{هـ}^{\text{س}}$	$(٢\text{س} + ١٠)$

$\therefore \int \frac{\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}}}{(٢\text{س} + ١٠)}\, \text{ء س} = \frac{-\text{س}}{٢}\, (٢\text{س} + ١٠)^{-١}\, \text{هـ}^{\text{س}}$

$- \frac{١}{٢} \int \text{هـ}^{\text{س}}\, (٢\text{س} + ١٠)^{-١} \times (٢\text{س} + ١)^{-١}\, \text{ء س}$

$= -\frac{\text{س}}{٢}\, (٢\text{س} + ١)^{-١}\, \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١}{٢} \int \text{هـ}^{\text{س}}\, (٢\text{س} + ١)^{-١}\, \text{ء س}$

$= -\frac{\text{س}}{٢}\, (٢\text{س} + ١)^{-١}\, \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١}{٤}\, \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

⑨

$\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}}$	$(\text{س} + ١)^{٢}$
$\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}$	$-(\text{س} + ١)^{-١}$
$\text{هـ}^{\text{س}}(\text{س} + ١)$	

$\therefore \int \frac{\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}\, \text{ء س}$

$= -\text{س}\, (\text{س} + ١)^{-١}\, \text{هـ}^{\text{س}} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء س}$

$= -\text{س}\, (\text{س} + ١)^{-١}\, \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

⑩ $\int \frac{\text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}\, \text{ء س}$

$\text{ع}\, \text{هـ}^{\text{ع}}$	$(١٠\text{ع})^{-٢}$
$\text{ع}\, \text{هـ}^{\text{ع}} + \text{هـ}^{\text{ع}}$	$-(١٠\text{ع})^{-١}$
$\text{هـ}^{\text{ع}}(١٠\text{ع})$	

بوضع $\text{س}^{٢} = \text{ع}$

$\therefore ٢\text{س}\, \text{ء س} = \text{ء ع}$

$\therefore \int \frac{\text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}\, \text{ء س}$

$= \int \frac{\text{ع}\, \text{هـ}^{\text{ع}}}{(\text{ع} + ١)^{٢}}\, \text{ء ع}$

[illegible]

٧

[illegible]

حل آخر

[illegible]

$= \frac{1}{5}\int (5\text{س} + 4 - 4)(5\text{س} + 4)^{\frac{1}{2}}\,\text{ء س}$

$= \frac{1}{5}\int (5\text{س} + 4)^{\frac{3}{2}}\,\text{ء س} - 4\int (5\text{س} + 4)^{\frac{1}{2}}\,\text{ء س}$

$= \frac{1}{5}\left[\frac{(5\text{س} + 4)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2} \times 5}\right] - \frac{4}{5}\left[\frac{(5\text{س} + 4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times 5}\right] + \text{ث}$

$= \frac{2}{75}(5\text{س} + 4)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{75}(5\text{س} + 4)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

(٣) $\int \frac{4\text{س}}{\sqrt{2\text{س} + 1}}\,\text{ء س}$

بوضع $2\text{س} + 1 = \text{ع}$ ∴ $\text{س} = \frac{1}{2}\text{ع} - \frac{1}{2}$

∴ $\text{ء س} = \frac{1}{2}\,\text{ء ع}$

∴ $\int \frac{4\text{س}}{\sqrt{2\text{س} + 1}}\,\text{ء س} = \int \frac{2\text{ع} - 2}{\sqrt{\text{ع}}} \times \frac{1}{2}\,\text{ء ع}$

$= \int (\text{ع} - 1) \times \text{ع}^{-\frac{1}{2}}\,\text{ء ع}$

$= \int (\text{ع}^{\frac{1}{2}} - \text{ع}^{-\frac{1}{2}})\,\text{ء ع}$

$= \frac{2}{3}\text{ع}^{\frac{3}{2}} - 2\text{ع}^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= \frac{2}{3}(2\text{س} + 1)^{\frac{3}{2}} - 2(2\text{س} + 1)^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

حل آخر

$\int \frac{\text{س}}{\sqrt{2\text{س} + 1}}\,\text{ء س} = \frac{1}{2}\int \text{ء س}\,(2\text{س} + 1)^{-\frac{1}{2}}\,\text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\int (2\text{س} + 1 - 1)(2\text{س} + 1)^{-\frac{1}{2}}\,\text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\int (2\text{س} + 1)^{\frac{1}{2}}\,\text{ء س} - \frac{1}{2}\int (2\text{س} + 1)^{-\frac{1}{2}}\,\text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2\text{س} + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times 2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{(2\text{س} + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times 2}\right] + \text{ث}$

$= \frac{1}{6}(2\text{س} + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(2\text{س} + 1)^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

ثانيًا مسائل على تطبيقات التكامل

١

(١) (د) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (جـ) (٥) (د)

(٦) (أ) (٧) (جـ) (٨) (د) (٩) (أ) (١٠) (د)

(١١) (ب) (١٢) (ب)

٢

ميل العمودى = $3 - \text{س}$

∴ ميل المماس = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{-1}{3 - \text{س}} = \frac{1}{\text{س} - 3}$

بالتكامل ∴ $\text{ص} = \int \frac{1}{\text{س} - 3}\,\text{ء س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - 3| + \text{ث}$

، ∵ أ ∈ المنحنى ∴ $3 = \text{لو}_{\text{هـ}}|2 - 3| + \text{ث}$

∴ $\text{ث} = 3$

∴ معادلة المنحنى : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - 3| + 3$

٣

ميل المماس = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{س}\sqrt{\text{س} + 1}$

∴ $\text{ص} = \int \text{س}\sqrt{\text{س} + 1}\,\text{ء س}$

$= \int (\text{س} + 1 - 1)(\text{س} + 1)^{\frac{1}{2}}\,\text{ء س}$

$= \int \left((\text{س} + 1)^{\frac{3}{2}} - (\text{س} + 1)^{\frac{1}{2}}\right)\text{ء س}$

$= \frac{2}{5}(\text{س} + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(\text{س} + 1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

∴ $\left(0 ، \frac{11}{15}\right)$ على المنحنى

∴ $\frac{11}{15} = \frac{2}{5}(0 + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(0 + 1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

∴ $\text{ث} = 1$

∴ معادلة المنحنى

$\text{ص} = \frac{2}{5}(\text{س} + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(\text{س} + 1)^{\frac{3}{2}} + 1$

[illegible]

[illegible]

حل آخر

[illegible]

(١٤) $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}+١)^{٣}}\,\text{ء س}$

بوضع ع = س + ١ ∴ س = ع − ١

∴ ء س = ء ع

∴ $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}+١)^{٣}}\,\text{ء س} = \int \frac{\text{ع}-١}{\text{ع}^{٣}}\,\text{ء ع}$

$= \int \left(\frac{١}{\text{ع}^{٢}} - \text{ع}^{-٣}\right)\text{ء ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| - \frac{\text{ع}^{-٢}}{-٢} + \text{ث}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \frac{١}{٢(\text{س}+١)^{٢}} + \text{ث}$

(١٥) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{٢\text{س}+٢}}\,\text{ء س}$ بوضع ع² = ٢ س + ٢

∴ س = $\frac{\text{ع}^{٢}-٢}{٢}$ ∴ ء س = ع ء ع

∴ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{٢\text{س}+٢}}\,\text{ء س} = \int \frac{\frac{\text{ع}^{٢}-٢}{٢}}{\text{ع}}\,\text{ء ع}$

$= \int \left(\frac{١}{٢}\text{ع} - \frac{١}{٢}\text{ع}^{-١}\right)\text{ء ع}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{\text{ع}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{\text{ع}^{٢}}{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٤}(\text{س}+١)^{٢} - \sqrt{٢}(\text{س}+١)^{٢} + \text{ث}$

(١٦) $\int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{\text{س}-١}}\,\text{ء س}$ بوضع ع = س − ١

∴ س = ع + ١ ∴ ء ع = ء س

∴ $\int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{\text{س}-١}}\,\text{ء س} = \int \frac{\text{ع}+١}{\sqrt{\text{ع}}}\,\text{ء ع}$

$= \int \left(\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + ٢\text{ع}^{-\frac{١}{٢}}\right)\text{ء ع}$

$= \frac{\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ٢ \times \frac{\text{ع}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣}\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + ٤\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣}(\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}} + ٤(\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

(١٧) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{٢\text{س}+٣}}\,\text{ء س}$ بوضع ع² = ٢ س + ٣

∴ س = $\frac{\text{ع}^{٢}-٣}{٢}$ ∴ ء س = ع ء ع

∴ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{٢\text{س}+٣}}\,\text{ء س} = \int \frac{\frac{\text{ع}^{٢}-٣}{٢}}{\text{ع}}\,\text{ء ع}$

$= \int \left(\frac{١}{٢}\text{ع}^{٢} - \frac{٣}{٢}\text{ع}^{-١}\right)\text{ء ع}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{\text{ع}^{٣}}{٣} - \frac{٣}{٢} \times \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + \text{ث}$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٣}(\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٣}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{ث}$

(١٨) $\int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{٢\text{س}-١}}\,\text{ء س}$ بوضع ع = ٢ س − ١

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ع + $\frac{١}{٢}$ ∴ ء س = $\frac{١}{٢}$ ء ع

∴ $\int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{٢\text{س}-١}}\,\text{ء س} = \int \frac{\frac{١}{٢}\text{ع}+١}{\sqrt{\text{ع}}} \times \frac{١}{٢}\,\text{ء ع}$

$= \int \left(\frac{١}{٤}\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}\text{ع}^{-\frac{١}{٢}}\right)\text{ء ع}$

$= \frac{١}{٦}\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢}\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٦}(٢\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢}(٢\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

(١٩) $\int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{(\text{س}+١)^{٣}}}\,\text{ء س}$ بوضع ع = س + ١

∴ س = ع − ١ ∴ ء س = ء ع

∴ $\int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{(\text{س}+١)^{٣}}}\,\text{ء س} = \int \frac{\text{ع}-١}{\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}}\,\text{ء ع}$

$= \int \left(\text{ع}^{-\frac{١}{٢}} - \text{ع}^{-\frac{٣}{٢}}\right)\text{ء ع}$

$= ٢\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{\sqrt{\text{ع}}} + \text{ث}$

$= ٢(\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{\sqrt{\text{س}+١}} + \text{ث}$

$= \frac{٢(\text{س}+٢)}{\sqrt{\text{س}+١}} + \text{ث}$

(٢٠) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{(\sqrt{\text{س}}-١)^{٣}}\,\text{ء س}$ بوضع ع = $\sqrt{\text{س}}$ − ١

∴ س = (ع + ١)² ∴ ء س = ٢ (ع + ١) ء ع

∴ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}\,\text{ء س}}{(\sqrt{\text{س}}-١)^{٣}}$

$= \int \frac{\text{ع}+١}{\text{ع}^{٣}} \times ٢(\text{ع}+١)\,\text{ء ع}$

$= \int \frac{٢(\text{ع}^{٢}+٢\text{ع}+١)}{\text{ع}^{٣}}\,\text{ء ع}$

$= \int \left(٢\text{ع}^{-١} + ٤\text{ع}^{-٢} + ٢\text{ع}^{-٣}\right)\text{ء ع}$

$= \frac{٢\text{ع}^{-٢}}{-٢} + \frac{٤\text{ع}^{-١}}{-١} + \frac{٢\text{ع}^{-٣}}{-٣} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{\text{ع}^{٢}} - \frac{٤}{\text{ع}} - \frac{٢}{\text{ع}^{٣}} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{(\sqrt{\text{س}}-١)^{٢}} - \frac{٤}{\sqrt{\text{س}}-١} - \frac{٢}{(\sqrt{\text{س}}-١)^{٣}} + \text{ث}$

(٢١) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{٢\text{س}-١}}\,\text{ء س}$ بوضع ع = ٢ س − ١

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ع + $\frac{١}{٢}$ ∴ ء س = $\frac{١}{٢}$ ء ع

∴ $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{٢\text{س}-١}}\,\text{ء س}$

$= \int \frac{\left(\frac{١}{٢}\text{ع}+\frac{١}{٢}\right)^{٢}}{\sqrt{\text{ع}}} \times \frac{١}{٢}\,\text{ء ع}$

$= \int \frac{\frac{١}{٤}\text{ع}^{٢}+\frac{١}{٢}\text{ع}+\frac{١}{٤}}{\sqrt{\text{ع}}} \times \frac{١}{٢}\,\text{ء ع}$

$= \int \left(\frac{١}{٨}\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٤}\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٨}\text{ع}^{-\frac{١}{٢}}\right)\text{ء ع}$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{٢}{٥}\text{ع}^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٣}\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٨} \times \frac{٢}{١}\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢٠}\text{ع}^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٦}\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٤}\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢٠}(٢\text{س}-١)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٦}(٢\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٤}(٢\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

(٢٢) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{٢-\text{س}^{٢}}}\,\text{ء س}$ بوضع ع² = ٢ − س²

فإن: س² = ٢ − ع² ∴ ٢ س ء س = −٢ ع

اجابات تمارين 17

٩

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس - \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= ٢٥٥ - (-(-١٥)) = ٢٤٠$

١٠

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٠} د(س)\,دس + \int_{٠}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٠} (٣س^٢ - ٢س)\,دس + \int_{٠}^{٣} س^٢\,دس$

$= \left[\frac{٣}{٣}س^٣ - ٢س^٢\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{١}{٣}س^٣\right]_{٠}^{٣}$

$= \frac{١٢}{٣} + ٩ = \frac{٣٩}{٣}$

١١

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} ٢س\,دس + \int_{-٢}^{٣} س\,دس$

$= \left[٢س^٢\right]_{-٢}^{٣} + \left[\frac{١}{٢}س^٢\right]_{-٢}^{٣}$

$= (١٨ - ٨) + \frac{٥}{٢} = ٢٠$

١٢

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس + \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} ٢س\,دس + \int_{-٢}^{٣} س\,دس$

$= \left[س^٢\right]_{-٢}^{٣} + \left[\frac{١}{٢}س^٢\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٥ + \frac{٥}{٢} = \frac{١٥}{٢}$

١٣

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (س^٢ + ١)\,دس + \int_{-٢}^{٣} (٢س - ١)\,دس$

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ + س\right]_{-٢}^{٣} + \left[س^٢ - س\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٢٠ + ٦ = ٢٦$

١٤

① $\int_{-٢}^{٣} (س - ١)\,دس$ ، $د(س) = |س - ١|$

$= \begin{cases} س - ١ & ، س \geq ١ \\ -س + ١ & ، س < ١ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{١} (-س + ١)\,دس + \int_{١}^{٣} (س - ١)\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢ + س\right]_{-٢}^{١} + \left[\frac{١}{٢}س^٢ - س\right]_{١}^{٣}$

$= ٢ + ٢ = ٤$

② $د(س) = |س - ٣|$

$= \begin{cases} س - ٣ & ، س \geq ٣ \\ -س + ٣ & ، س < ٣ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس = \int_{-٢}^{٣} (-س + ٣)\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢ + ٣س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{٣٢}{٢} = ١٦$

③ $د(س) = |س^٢ - ٢|$

$= \begin{cases} س^٢ - ٢ & ، س \leq -٢ \\ -س^٢ + ٢ & ، -٢ < س < ٢ \\ س^٢ - ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس = \int_{-٢}^{٣} (-س^٢ + ٢)\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + ٢س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{٣٢}{٣}$

⑩

$د(س) = |س^٢ - ١|$

$= \begin{cases} س^٢ - ١ & ، س \leq -٢ \\ -س^٢ + ١ & ، -٢ < س < ٢ \\ س^٢ - ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{-١} (س^٢ - ١)\,دس + \int_{-١}^{١} (-س^٢ + ١)\,دس + \int_{١}^{٣} (س^٢ - ١)\,دس$

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س\right]_{-٢}^{-١} + \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + س\right]_{-١}^{١} + \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} + \frac{١٦}{٣} = \frac{٢٢}{٣} = ٧\frac{١}{٣}$

١٥

① (ب)	② (ب)	③ (أ)	④ (ب)	⑤ (ب)
⑥ (ب)	⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (ب)
⑪ (ب)	⑫ (ب)	⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (ب)
⑯ (أ)	⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (أ)
㉑ (أ)	㉒ (ب)			

١٦

① $د(س)$ دورية

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

② $د(س)$ دورية

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

③ $د(س)$ دورية

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

④ $د(س)$ دورية

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

④ $د(س) = س$

$= \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٠} (-س)\,دس + \int_{٠}^{٣} س\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{١}{٢}س^٢\right]_{٠}^{٣}$

$= ٢ + \frac{٩}{٢} = \frac{١٣}{٢}$

⑤ $د(س) = |٢س - ٢|$

$= \begin{cases} ٢س - ٢ & ، س \geq ١ \\ -٢س + ٢ & ، س < ١ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{١} (-٢س + ٢)\,دس + \int_{١}^{٣} (٢س - ٢)\,دس$

$= \left[-س^٢ + ٢س\right]_{-٢}^{١} + \left[س^٢ - ٢س\right]_{١}^{٣}$

$= ٣ + ٣ = ٦$

⑥ $د(س) = |٢س - ٣|$

$= \begin{cases} ٢س - ٣ & ، س \geq \frac{٣}{٢} \\ -٢س + ٣ & ، س < \frac{٣}{٢} \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{\frac{٣}{٢}} (-٢س + ٣)\,دس + \int_{\frac{٣}{٢}}^{٣} (٢س - ٣)\,دس$

$= \left[-س^٢ + ٣س\right]_{-٢}^{\frac{٣}{٢}} + \left[س^٢ - ٣س\right]_{\frac{٣}{٢}}^{٣}$

$= \frac{٩}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٢}$

⑦ $د(س) = |س - ١٠|$

$= \begin{cases} س - ١٠ & ، س \geq ١٠ \\ -س + ١٠ & ، س < ١٠ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-س + ١٠)\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢ + ١٠س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{١٩}{٢} + ٩٠ = \frac{٢٠١}{٢}$

⑧ $د(س) = |س|\,|س|$

$= \begin{cases} س^٢ & ، س \geq ٠ \\ -س^٢ & ، س < ٠ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} س^٢\,دس$

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣\right]_{-٢}^{٣} + \left[\frac{١}{٣}س^٣\right]_{٠}^{٣}$

$= ٩ + ٩ = ١٨$

⑨ $د(س) = |٢س - ١٠|$

$= \begin{cases} ٢س - ١٠ & ، س \geq ٥ \\ -٢س + ١٠ & ، س < ٥ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-٢س + ١٠)\,دس$

$= \left[-س^٢ + ١٠س\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٢١ + ٢٤ = ٤٥$

⑩ $د(س) = |س^٢ - ٩|$

$= \begin{cases} س^٢ - ٩ & ، س \leq -٣ \\ -س^٢ + ٩ & ، -٣ < س < ٣ \\ س^٢ - ٩ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس = \int_{-٢}^{٣} (-س^٢ + ٩)\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + ٩س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{٥٤}{٣}$

⑪

$د(س) = |س^٢ - ١|$

$= \begin{cases} س^٢ - ١ & ، س \leq -٢ \\ -س^٢ + ١ & ، -٢ < س < ٢ \\ س^٢ - ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{-١} (س^٢ - ١)\,دس + \int_{-١}^{١} (-س^٢ + ١)\,دس + \int_{١}^{٣} (س^٢ - ١)\,دس$

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س\right]_{-٢}^{-١} + \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + س\right]_{-١}^{١} + \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} + \frac{١٦}{٣} = \frac{٢٢}{٣} = ٧\frac{١}{٣}$

١٧

① $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ دورية

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

② $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ دورية

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

③ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ دورية

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

④ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ دورية

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

⑤ $\because د(س) = ٥ - |س|$ روضة

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس = ٢٠ \int_{٠}^{٣} (٥ - |س|)\,دس$

$= ٢٠ \int_{٠}^{٣} (٥ - س)\,دس$

$= ٢٠ \left[٥س - \frac{١}{٢}س^٢\right]_{٠}^{٣}$

$= ٢٠ \times (٨) = ١٦٠$

⑥ $\because د(س) = س^٢ (٣ - ٢|س|)$ روضة

$\therefore \int_{-٢}^{٣} س^٢ (٣ - ٢|س|)\,دس$

$= ٢ \int_{٠}^{٣} (٣س^٢ - ٢س^٣)\,دس$

$= ٢ \int_{٠}^{٣} (٣س^٢ - ٢س^٣)\,دس$

$= ٢ \left[س^٣ - \frac{١}{٢}س^٤\right]_{٠}^{٣} = ٢ \times ٠ = \text{صفر}$

⑦ $د(س) = (٩س^٢ - ٢\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٢}س)$ فردية

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس = \text{صفر}$

⑧ $\because د(س) = \sqrt{س^٢}$ روضة

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس = ٢ \int_{٠}^{٣} \sqrt{س^٢}\,دس$

$= ٢ \int_{٠}^{٣} \sqrt{س^٢}\,دس$

$= ٢ \left[\frac{١}{٣}(س^٢)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٣}$

$= \frac{٢}{٣}\left[(٣^٢)^{\frac{٣}{٢}} - ٠\right] = \frac{٢٧}{٣} = ٩$

⑨ $د(س) = |\,\text{جا}\,س|$ روضة

$\int_{-\pi}^{\pi} د(س)\,دس$

$= ٢ \int_{٠}^{\pi} د(س)\,دس = ٢ \int_{٠}^{\pi} |\,\text{جا}\,س|\,دس$

$= ٢ \left[-\,\text{جتا}\,س\right]_{٠}^{\pi}$

$= ٢ \times (١ + ١) = ٤$

⑩ $\because د(س) = |س|$ روضة

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس = \int_{-٢}^{٣} |س|\,دس$

$= \int_{-٢}^{٠} (-س)\,دس + \int_{٠}^{٣} س\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{١}{٢}س^٢\right]_{٠}^{٣}$

$= ٢ + \frac{٩}{٢} = \frac{١٣}{٢}$

١٨

① $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (س^٢ - ٢)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-٢)\,دس$

$= -\left[٢س\right]_{-٢}^{٣}$

$= -٢ \times ٥ = -١٠$

② $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (٢س - ٣)\,دس$

$= \left[س^٢ - ٣س\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٢٠ + ٦ = ٢٦$

③ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-س^٢ + ٢)\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + ٢س\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٣ + ٦ = ٩$

④ $د(س) = |س|$

$= \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٠} (-س)\,دس + \int_{٠}^{٣} س\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{١}{٢}س^٢\right]_{٠}^{٣}$

$= ٢ + \frac{٩}{٢} = \frac{١٣}{٢}$

⑤ $د(س) = ٢س - ١٠$

$= \begin{cases} ٢س - ١٠ & ، س \geq ٥ \\ -٢س + ١٠ & ، س < ٥ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-٢س + ١٠)\,دس$

$= \left[-س^٢ + ١٠س\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٢١ + ٢٤ = ٤٥$

⑥ $د(س) = |٢س - ٣|$

$= \begin{cases} ٢س - ٣ & ، س \geq \frac{٣}{٢} \\ -٢س + ٣ & ، س < \frac{٣}{٢} \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{\frac{٣}{٢}} (-٢س + ٣)\,دس + \int_{\frac{٣}{٢}}^{٣} (٢س - ٣)\,دس$

$= \left[-س^٢ + ٣س\right]_{-٢}^{\frac{٣}{٢}} + \left[س^٢ - ٣س\right]_{\frac{٣}{٢}}^{٣}$

$= \frac{٩}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٢}$

⑦ $د(س) = |س - ١٠|$

$= \begin{cases} س - ١٠ & ، س \geq ١٠ \\ -س + ١٠ & ، س < ١٠ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-س + ١٠)\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢ + ١٠س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{١٩}{٢} + ٩٠ = \frac{٢٠١}{٢}$

⑧ $د(س) = |س|\,|س|$

$= \begin{cases} س^٢ & ، س \geq ٠ \\ -س^٢ & ، س < ٠ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} س^٢\,دس$

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣\right]_{-٢}^{٣} + \left[\frac{١}{٣}س^٣\right]_{٠}^{٣}$

$= ٩ + ٩ = ١٨$

⑨ $د(س) = |٢س - ١٠|$

$= \begin{cases} ٢س - ١٠ & ، س \geq ٥ \\ -٢س + ١٠ & ، س < ٥ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-٢س + ١٠)\,دس$

$= \left[-س^٢ + ١٠س\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٢١ + ٢٤ = ٤٥$

⑩ $د(س) = |س^٢ - ٩|$

$= \begin{cases} س^٢ - ٩ & ، س \leq -٣ \\ -س^٢ + ٩ & ، -٣ < س < ٣ \\ س^٢ - ٩ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس = \int_{-٢}^{٣} (-س^٢ + ٩)\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + ٩س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{٥٤}{٣}$

⑪

$د(س) = |س^٢ - ١|$

$= \begin{cases} س^٢ - ١ & ، س \leq -٢ \\ -س^٢ + ١ & ، -٢ < س < ٢ \\ س^٢ - ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{-١} (س^٢ - ١)\,دس + \int_{-١}^{١} (-س^٢ + ١)\,دس + \int_{١}^{٣} (س^٢ - ١)\,دس$

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س\right]_{-٢}^{-١} + \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + س\right]_{-١}^{١} + \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} + \frac{١٦}{٣} = \frac{٢٢}{٣} = ٧\frac{١}{٣}$

١٩

① $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ دورية

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

② $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ دورية

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

③ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ دورية

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

④ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ دورية

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

٢٠

① $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (س - ٢)\,دس$

$= \left[\frac{١}{٢}س^٢ - ٢س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{٥}{٢} + ٢٠ = \frac{٤٥}{٢}$

② $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-٢س + ٢٠)\,دس$

$= \left[-س^٢ + ٢٠س\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٢١ + ٢٤ = ٤٥$

③ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-٢)\,دس$

$= \left[-٢س\right]_{-٢}^{٣}$

$= -٢ \times ٥ = -١٠$

④ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (٢س - ٢٠)\,دس$

$= \left[س^٢ - ٢٠س\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٢١ - ٢٤ = -٣$

⑤ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (س - ٢)\,دس$

$= \left[\frac{١}{٢}س^٢ - ٢س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{٥}{٢} + ٢٠ = \frac{٤٥}{٢}$

⑥ $د(س) = \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٠} (-س)\,دس + \int_{٠}^{٣} س\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{١}{٢}س^٢\right]_{٠}^{٣}$

$= ٢ + \frac{٩}{٢} = \frac{١٣}{٢}$

⑦ $د(س) = |٢س - ٣|$

$= \begin{cases} ٢س - ٣ & ، س \geq \frac{٣}{٢} \\ -٢س + ٣ & ، س < \frac{٣}{٢} \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{\frac{٣}{٢}} (-٢س + ٣)\,دس + \int_{\frac{٣}{٢}}^{٣} (٢س - ٣)\,دس$

$= \left[-س^٢ + ٣س\right]_{-٢}^{\frac{٣}{٢}} + \left[س^٢ - ٣س\right]_{\frac{٣}{٢}}^{٣}$

$= \frac{٩}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٢}$

⑧ $د(س) = |س - ١٠|$

$= \begin{cases} س - ١٠ & ، س \geq ١٠ \\ -س + ١٠ & ، س < ١٠ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-س + ١٠)\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢ + ١٠س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{١٩}{٢} + ٩٠ = \frac{٢٠١}{٢}$

⑨ $د(س) = |٢س - ١٠|$

$= \begin{cases} ٢س - ١٠ & ، س \geq ٥ \\ -٢س + ١٠ & ، س < ٥ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (-٢س + ١٠)\,دس$

$= \left[-س^٢ + ١٠س\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٢١ + ٢٤ = ٤٥$

⑩ $د(س) = |س^٢ - ٩|$

$= \begin{cases} س^٢ - ٩ & ، س \leq -٣ \\ -س^٢ + ٩ & ، -٣ < س < ٣ \\ س^٢ - ٩ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس = \int_{-٢}^{٣} (-س^٢ + ٩)\,دس$

$= \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + ٩س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{٥٤}{٣}$

⑪

$د(س) = |س^٢ - ١|$

$= \begin{cases} س^٢ - ١ & ، س \leq -٢ \\ -س^٢ + ١ & ، -٢ < س < ٢ \\ س^٢ - ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{-١} (س^٢ - ١)\,دس + \int_{-١}^{١} (-س^٢ + ١)\,دس + \int_{١}^{٣} (س^٢ - ١)\,دس$

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س\right]_{-٢}^{-١} + \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + س\right]_{-١}^{١} + \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} + \frac{١٦}{٣} = \frac{٢٢}{٣} = ٧\frac{١}{٣}$

٢١

① $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ دورية

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

② $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ دورية

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

③ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ ، $د(س)$ روضة

$\int_{-٢}^{٣} (س^٢ - ١)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (س^٢ - ١)\,دس$

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س\right]_{-٢}^{٣}$

$= ٩ + ٢ = ١١$

٢٢

① $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{٣} (س - ٢)\,دس$

$= \left[\frac{١}{٢}س^٢ - ٢س\right]_{-٢}^{٣}$

$= \frac{٥}{٢} + ٢٠ = \frac{٤٥}{٢}$

② $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$ صفر

③ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس = ٢٠ \int_{٠}^{٣} د(س)\,دس$

$= ٢٠ \times ٥ = ١٠٠$

٢٣

$\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس - \int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس$

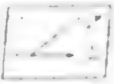
$= ٩٠ - ٩٠ = ٠$

١٣

(١) [illegible]	(٢) [illegible]	(٣) [illegible]	(٤) [illegible]	(٥) [illegible]
(٦) [illegible]	(٧) [illegible]	(٨) [illegible]	(٩) [illegible]	(١٠) [illegible]
(١١) [illegible]	(١٢) [illegible]	(١٣) [illegible]	(١٤) [illegible]	(١٥) [illegible]
(١٦) [illegible]	(١٧) [illegible]	(١٨) [illegible]	(١٩) [illegible]	(٢٠) [illegible]
(٢١) [illegible]	(٢٢) [illegible]	(٢٣) [illegible]	(٢٤) [illegible]	(٢٥) [illegible]
(٢٦) [illegible]	(٢٧) [illegible]			

١٤

(١) [illegible]	(٢) [illegible]	(٣) [illegible]	(٤) [illegible]	(٥) [illegible]
(٦) [illegible]	(٧) [illegible]	(٨) [illegible]	(٩) [illegible]	(١٠) [illegible]
(١١) [illegible]	(١٢) [illegible]	(١٣) [illegible]	(١٤) [illegible]	(١٥) [illegible]
(١٦) [illegible]	(١٧) [illegible]	(١٨) [illegible]	(١٩) [illegible]	(٢٠) [illegible]
(٢١) [illegible]				



إرشادات لحل رقم ١٤

(١) بوضع ص = ٢ س ∴ ٤ ص = ٢ ٤ س

• عند س = ٦ فإن ص = ١٢

• عند س = ١٢ فإن ص = ٢٤

(٩) بوضع س² = ص

• عند س = ٣ ...

• عند س = ٣ فإن ص = ٩

---

(١١)

• في التكامل المعطى

بوضع ٣ س + ٢ = ص ∴ ٤ ص = ٣ ٤ س

وعند س = ٠ فإن ص = ٢ ، عند ص = ٥

ص = ١٧

• في التكامل المطلوب

بوضع ٥ س + ٢ = ع ∴ ٤ ع = ٥ ٤ س

• عند س = ٠ ∴ ع = ٢

• عند س = ٣ ∴ ع = ١٧

$= \frac{1}{5} \times 135 = 27$

(٢٣) بوضع د(س) = $\sqrt{س^2 + 16}$

$= 2(3) = 2\sqrt{(3)^2 + 16} = 10$

(٧) ∵ د(س) = س لو س

لو ٧ – لو ٤ = لو $\frac{7}{4}$

وبالمثل نجد أن

(١٥) $= (د(٣))^2 - (د(س))^2 = (1)^2 - (\sqrt{2})^2 = -1$

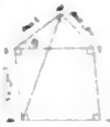
(١٦) بوضع ع = س – ٥

• عند س = ٥

• عند س = ١٠

∴ التكامل = صفر لأن الدالة فردية = صفر

(١٧) ∵ أ ب حـ ء مربع



في △ هـ أ ء

(١٨) $\frac{1}{2} (صفر - (4)^2) = \frac{-16}{2}$

(١٩) ∵ ميل المماس ل $= \frac{4-2}{-1} = -2$

∴ د(١) = –٢

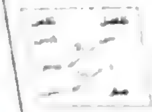
= د(١) – د(–٣) = –٢ – صفر = –٢

(٢٠) ∵ ميل ل = ظا ٤٥° = ١ ∴ د(٣) = ١

∵ ميل ل = $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

= لو ١ – لو $\frac{3}{4}$ = لو $\frac{4}{3}$

(٢١) ميل المماس ل = $\frac{3}{4}$



18

1

① $\int_{-٢}^{٤} (٢\text{س} + ٣)\,\text{ء س} = [\text{س}^٢ + ٣\text{س}]_{-٢}^{٤}$

$= (١٦ + ١٢) - (١ - ٣) = ٣٠$ وحدة مربعة.

② $\text{ص} = |\text{س} - ٣|$ يقع فوق محور السينات

في الفترة $[٢ ، ٥]$

∴ المساحة $= \int_{٢}^{٥} |\text{س} - ٣|\,\text{ء س}$

$= \int_{٢}^{٣} (-\text{س} + ٣)\,\text{ء س}$

$+ \int_{٣}^{٥} (\text{س} - ٣)\,\text{ء س}$

$= \left[-\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + ٣\text{س}\right]_{٢}^{٣}$

$+ \left[\frac{١}{٢}\text{س}^٢ - ٣\text{س}\right]_{٣}^{٥}$

$= ٢,٥$ وحدة مربعة.

③ $\text{ص} = ٣\text{س}^٢$ يقع فوق محور السينات

في الفترة $[-٣ ، ١]$

∴ المساحة $= \int_{-٣}^{١} ٣\text{س}^٢\,\text{ء س}$

$= [\text{س}^٣]_{-٣}^{١} = ١ - (-٢٧) = ٢٨$

2

① $\int_{٠}^{٢} (١ + \frac{١}{٢}\text{س})\,\text{ء س} = [\text{س} + \frac{١}{٤}\text{س}^٢]_{٠}^{٢}$

$= \frac{٣}{٢}$ وحدة مربعة

② $\int_{٠}^{٣} \text{س}\,\text{ء س} = [\frac{١}{٢}\text{س}^٢]_{٠}^{٣} = ٦$ وحدة مربعة.

③ $\int_{٠}^{٣} \text{س}^٢\,\text{ء س} = [\frac{١}{٣}\text{س}^٣]_{٠}^{٣} = ٣$ وحدة مربعة

④ $\int_{٠}^{٢} (\text{س}^٢ - ٢\text{س})\,\text{ء س}$

$= \int_{٠}^{١} (\text{س}^٢ - ٢\text{س})\,\text{ء س} |$

$[\frac{١}{٣}\text{س}^٣ - \text{س}^٢]_{٠}^{١} + |[\frac{١}{٣}\text{س}^٣ - \text{س}^٢]_{١}^{٢}|$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} = ٢$ وحدة مربعة

⑤ $\int_{٠}^{٢} (\text{س}^٢ - ٢\text{س})\,\text{ء س} = [\text{س}^٣ - \text{س}^٢]_{٠}^{٢}$

$= \frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة.

⑥ $\int_{١}^{٢} (١ - \text{س})\,\text{ء س} + \int_{٢}^{٤} |(١ - \text{س})\,\text{ء س}|$

$= [\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^٢]_{١}^{٢}$

$+ |[\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^٢]_{٢}^{٤}|$

$= \frac{١}{٢} + \frac{٦}{٢} = \frac{٧}{٢}$ وحدة مربعة

⑦ $\int_{١}^{٢} (١ - \text{س})^٢\,\text{ء س} = [\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^٣]_{١}^{٢}$

$= \frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

⑦ $\int_{١}^{٣} \frac{٢}{\text{س}}\,\text{ء س} = [٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|]_{١}^{٣}$

$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}١$

$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣$ وحدة مربعة

⑧ $\int_{٠}^{١} (١ - \text{س})^٢\,\text{ء س} - \int_{١}^{٢} (\text{س} - ٢)\,\text{ء س}$

$= \int_{٠}^{١} (١ - \text{س})^٢ - (\text{س} - ٢)\,\text{ء س}$

$= \int_{٠}^{١} (٣ - \text{س}^٢ - \text{س})\,\text{ء س}$

$= [٣\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^٣ - \frac{١}{٢}\text{س}^٢]_{٠}^{١}$

$= \frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة

⑨ $\int_{٠}^{١} (١ - \text{س})^٢\,\text{ء س} - \int_{١}^{٢} (٢ - \frac{\text{س}}{٢})\,\text{ء س}$

$= \int_{٠}^{١} (٣ - \frac{١}{٢}\text{س}^٢)\,\text{ء س}$

$- [٣\text{س} - \frac{١}{٤}\text{س}^٢]_{١}^{٢} = \frac{١٣}{٤}$ وحدة مربعة

⑩ $\int_{٠}^{٢} ٢\sqrt{\text{س} + ٤}\,\text{ء س}$

$- [\frac{٢}{٣}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٣} \times ٢٧ = ٢٦$ وحدة مربعة.

⑪ $\int_{١}^{\text{هـ}} (\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}})\,\text{ء س} + \int_{\text{هـ}}^{٢} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\,\text{ء س}$

$= |[\frac{١}{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢]_{١}^{\text{هـ}}| + [\frac{١}{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢]_{\text{هـ}}^{٢}$

$= |\frac{١}{٢}(\text{صفر} - ١)| + \frac{١}{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}٢)^٢ - \text{صفر}$

$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$ وحدة مربعة

⑫ $\int_{١}^{\text{هـ}} (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ})\,\text{ء س} + \int_{\text{هـ}}^{٢} (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ})\,\text{ء س}$

$= |[\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}\text{س}]_{١}^{\text{هـ}}| + [\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}\text{س}]_{\text{هـ}}^{٢}$

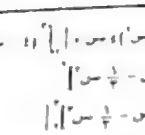
$= |\text{هـ} - \text{هـ}| + (\text{هـ}^٢ - ٢\text{هـ}) - (\text{هـ}^{\text{هـ}} - \text{هـ}^٢)$

$= ١ + \text{هـ}^٢ - ٢\text{هـ} = \text{هـ}^٢ - ٢\text{هـ} + ١$

$= (\text{هـ} - ١)^٢$ وحدة مربعة

3

①



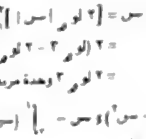
$\text{س} + ٢\text{ص} = ٩$ ، $\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س} + ٤$

∴ المساحة $= \int_{٠}^{٣} (٩ - \text{س} - \frac{١}{٢}\text{س} - ٤)\,\text{ء س}$

$= [٥\text{س} - \frac{١}{٤}\text{س}^٢]_{٠}^{٣}$

٧ وحدة مربعة

②



• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات

$\text{س}^٢ = ٤$

∴ المنحنى يقع تحت محور السينات في الفترة

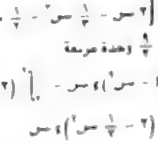
$[٠ ، ٢]$

المساحة $= \int_{٠}^{٢} (\text{س}^٢ - ٤)\,\text{ء س}$

$= [\frac{١}{٣}\text{س}^٣ - ٤\text{س}]_{٠}^{٢}$

$\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

③



• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نصفي

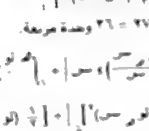
$\text{س}^٢ = ٩$

∴ المساحة $= \int_{٠}^{٣} (٩ - \text{س}^٢)\,\text{ء س}$

$[٩\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^٣]_{٠}^{٣}$

١٨ وحدة مربعة

④



• نقط التقاطع مع محور السينات

$٣ - ٢\text{س} = \text{س}^٢$

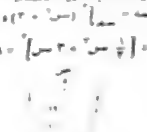
∴ $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = -٣$

∴ المساحة $= \int_{-٣}^{١} (٣ - ٢\text{س} - \text{س}^٢)\,\text{ء س}$

$[٣\text{س} - \text{س}^٢ - \frac{١}{٣}\text{س}^٣]_{-٣}^{١}$

$\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

⑤



• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نصفي

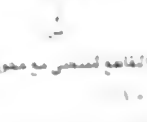
$\text{س}^٢ = ٩$

∴ المساحة $= \int_{٠}^{٣} (٩ - \text{س}^٢)\,\text{ء س}$

$[٩\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^٣]_{٠}^{٣}$

١٨ وحدة مربعة

⑥



• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات

$\text{س}^٢ = ٤$

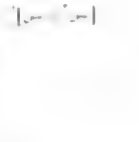
∴ $\text{س} = ٢$ ، $\text{س} = -٢$

∴ المساحة $= \int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{س}^٢)\,\text{ء س}$

$[٤\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^٣]_{-٢}^{٢}$

$\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

⑦



• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نصفي

$\text{س}^٢ = ١$

∴ المعادلة ليس لها حل في ح

المنحنى لا يقع محور السينات

∴ المساحة $= \int_{٠}^{١} (٢\text{س} + ١)\,\text{ء س}$

$[\text{س}^٢ + \text{س}]_{٠}^{١}$

٢ وحدة مربعة

⑧

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات

$\text{س} = ٤$

المساحة $= \int_{٠}^{٤} \sqrt{\text{س}}\,\text{ء س}$

$[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٤}$

$\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

⑨

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات

$\text{س} = ٤$

المساحة $= \int_{٠}^{٤} \sqrt{\text{س}}\,\text{ء س}$

$[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٤}$

$\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

⑩

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نصفي

$\text{س}^٢ = ٤$

المساحة $= \int_{٠}^{٢} \sqrt{\text{س}}\,\text{ء س}$

$[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٢}$

$\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة

⑪

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نصفي

$\text{س}^٢ = ٩$

المساحة $= \int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}}\,\text{ء س}$

$[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٣}$

٦ وحدة مربعة

⑫

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نصفي

$\text{س}^٢ = ٩$

المساحة $= \int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}}\,\text{ء س}$

$[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٣}$

٦ وحدة مربعة

⑬

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نصفي

$\text{س}^٢ = ٩$

المساحة $= \int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}}\,\text{ء س}$

$[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٣}$

٦ وحدة مربعة

⑭

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نصفي

$\text{س}^٢ = ٩$

المساحة $= \int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}}\,\text{ء س}$

$[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٣}$

٦ وحدة مربعة

⑮

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نصفي

$\text{س}^٢ = ٩$

المساحة $= \int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}}\,\text{ء س}$

$[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٣}$

٦ وحدة مربعة

⑯

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نصفي

$\text{س}^٢ = ٩$

المساحة $= \int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}}\,\text{ء س}$

$[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٣}$

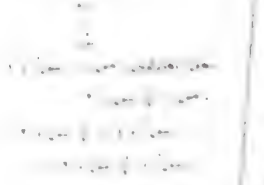
٦ وحدة مربعة

(١٤)

المساحة = $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$ جا س ء س = [− جتا س]$_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

= ١ وحدة مربعة.

(١٥)



المساحة = $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$ جا س ء س = [جا س]$_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

= ١ وحدة مربعة.

٤

(١) ص = ٢ − س^{٢}

، ص = ص س

بحل المعادلتين

∴ س = ٢

، س = ١

∴ المساحة = $\int_{١}^{٢}$ [(٢ − س^{٢}) − (− س)] ء س

= $\int_{١}^{٢}$ (٢ − س^{٢} + س) ء س

= [٢ س − $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{١}^{٢}$

= $\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة

(٢)

ص = س^{٢} − ٦ منها س = س^{٢} − ٦ = ٠ (١)

، ص = ٢ س − ٣ ،

منها س = ٢ س − ٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ س = ٣ ، س = ١

∴ المساحة = $\int_{١}^{٣}$ (− س^{٢} + ٦)

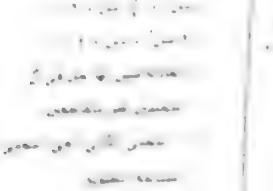
(− ٣ س + ٣) ء س

$\int_{١}^{٣}$ (− س^{٢} + ٣ س + ٣) ء س

= [− $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + ٣ س]$_{١}^{٣}$

= $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

(٣)



، (س − ١)^{٢} = ٤ س ، (س − ١)^{٢} = ٢ س + ١

بحل المعادلتين

∴ س = ٣ ، س = ١

∴ المساحة = $\int_{١}^{٣}$ ((٢ س + ١) − (٣ س^{٢}))ء س

= $\int_{١}^{٣}$ (− ٣ س^{٢} + ٢ س + ١) ء س

= [− $\frac{٣}{٣}$ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١ س]$_{١}^{٣}$

= ٤ وحدة مربعة

(٤)

• نقط التقاطع بحل المعادلتين

س = ٣ ، س = ١

المساحة = $\int_{١}^{٣}$ (٣ − س) − (س − ١) ء س

= $\int_{١}^{٣}$ (٤ − س − س^{٢}) ء س

= [٤ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{١}^{٣}$

= $\frac{١٠}{٣}$ وحدة مربعة

(٥)

• نقط التقاطع بحل المعادلتين

س = ٢ ، س = ٠

٩ − س^{٢} = ٥ ، س = ٠

المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ ((٩ − س^{٢}) − ٥) ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ (٤ − س^{٢}) ء س

= [٤ س − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

(٦)

بحل المعادلتين س = ٠ ، س = ١

∴ المساحة = $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) ء س

= [$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

(٧)

بحل المعادلتين س = ٠ ، س = ١

∴ المساحة = $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) ء س

= [$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

(٨)

بحل المعادلتين س = ٠ ، س = ١

∴ المساحة = $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) ء س

= [$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

(٩)

المساحة = $\int_{٠}^{١}$ ((س − س^{٢}) − (٢ س))ء س

= $\int_{٠}^{١}$ ((٣ س) − (س − س^{٢}))ء س

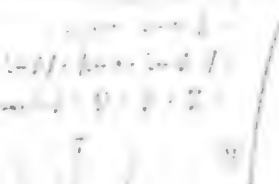
= $\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} − ٢ س)ء س

= $\int_{٠}^{١}$ (٣ س − س^{٢})ء س

= [$\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{٧}{٦}$ = ١ $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

(١٠) بحل المعادلتين س = ٠ ، س = ١



المساحة = $\int_{٠}^{١}$ (٢ $\sqrt{س}$ − ٢ س)ء س

= [٢ (س)$^{\frac{١}{٢}}$ − $\frac{٢}{٢}$ س^{٢}]$_{٠}^{١}$

= ١ $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

(١١)

بحل المعادلتين س = ٠ ، س = ١

∴ المساحة =

$\int_{٠}^{١}$ (٢ (س + ١)^{٢} − (س^{٢} + ٢))ء س

= $\int_{٠}^{١}$ (٢ (س + ١)^{٢} − س^{٢} − ٢)ء س

= $\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} + ٢ س + ١)ء س

= [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٢}{٢}$ (س + ١)^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{١}$

= ٢ وحدة مربعة

(١٢)

المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ ((٢ + ٢ س − س^{٢})

(س − ١))ء س

$\int_{٠}^{٢}$ ((٢ + ٢ س − س^{٢})

(س − ٢ س + ١))ء س

$\int_{٠}^{٢}$ (− ٢ س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣ س − ٢)ء س

[− $\frac{١}{٢}$ س^{٤} + $\frac{٥}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − ٢ س]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{٢٣}{٦}$ وحدة مربعة

(١٣)

المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ ((٢ + س − س^{٢})

− (س − ٢))ء س

$\int_{٠}^{٢}$ ((٢ + س − س^{٢})

− (س^{٢} − ٤ س + ٤))ء س

$\int_{٠}^{٢}$ (− ٢ س^{٢} + ٥ س − ٢)ء س

[− $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٥}{٢}$ س^{٢} − ٢ س]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{١٠}{٣}$ وحدة مربعة

(١٤)

المساحة المظللة

$\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} + ١) ء س − $\int_{٠}^{١}$ (٢ − س) ء س

[$\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س]$_{٠}^{١}$ − [٢ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{٤}{٣}$ − $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

(١٥)

بحل المعادلتين

∴ المساحة

$\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} + ١) ء س − $\int_{٠}^{١}$ (٢ − س) ء س

[$\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س]$_{٠}^{١}$ − [٢ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{٤}{٣}$ − $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

(١٦)

بحل المعادلتين

المساحة

$\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) ء س

[$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

(١٧)

المساحة = $\int_{٠}^{١}$ ((٢ − س) − (س^{٢} − ١))ء س

= $\int_{٠}^{١}$ (٣ − س − س^{٢})ء س

= [٣ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{٧}{٦}$ وحدة مربعة

(١٦)

لحل المعادلتين معًا نضع

س^{٢} = ١ س + ١ س − س^{٢}

∴ ٢ (س^{٢} − ١ س) = ٠

∴ ٢ س (س^{٢} − ١) = ٠

∴ ٢ س (س + ٢) (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ ، ١ س + ٢ = ٠ ، س − ٢ = ٠

المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ [(س^{٢} − ١ س)

(١ س − س^{٢})] ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ (١ س − س^{٢})

(س^{٢} − ١ س)] ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ (٢ س^{٢} − ٢ س) ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ ٢ س (س^{٢} − س) ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ ٢ س (س − ١) (س + ١) ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ ٢ س (س − ١) ء س

= [س^{٢} − س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ = (٤ − ٨) − (٠ − ٠)

= −٤ وحدة مربعة

(١٧)

لحل المعادلتين معًا نضع

س^{٢} = ٢ س − ٣ ، س = ٣

∴ المساحة = $\int_{٠}^{٣}$ [(٢ س − ٣) − س^{٢}] ء س

= $\int_{٠}^{٣}$ (٢ س − ٣ − س^{٢}) ء س

= [س^{٢} − ٣ س − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{٣}$

= (٩ − ٩ − ٩) − (٠ − ٠ − ٠)

= −٩ وحدة مربعة

(١٨)

لحل المعادلتين ∴ س = ١

∴ المساحة = $\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} + ١) − (٢ س^{٢}) ء س

= $\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} − ٢ س^{٢} + ١) ء س

= $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢} + ١) ء س

(١٩)

● نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم تحل المعادلتين

س^{٢} = ٨ ∴ س = ٢

المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ (٨ − س^{٢}) ء س

= [٨ س − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ = ١٠

(٢٠)

المساحة = $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) ء س

= $\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} − س) ء س

= [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ = −$\frac{١}{٦}$

٥

(١) $\int_{٠}^{٢}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ء س

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٤

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٢^{٢}

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

وطول نصف قطرها ٢

∴ المساحة = $\frac{١}{٤}$ (π) (٢)^{٢} = π وحدة مربعة

(٢)

$\int_{٠}^{٣}$ $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ ء س ∴ ص = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$

منها س^{٢} + ص^{٢} = ٩

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

وطول نصف قطرها ٣

∴ المساحة = $\frac{١}{٤}$ (π) (٣)^{٢} = $\frac{٩}{٤}$ π وحدة مربعة

(٣)

$\int_{٠}^{٢}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ء س ∴ ص = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

منها س^{٢} + ص^{٢} = ٤

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

وطول نصف قطرها ٢ وحدات

∴ المساحة = $\frac{١}{٤}$ (π) (٢)^{٢} = π وحدة مربعة

(٤)

$\int_{٠}^{٥}$ $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ء س ∴ ص = $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$

منها س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

وطول نصف قطرها ٥ وحدات

المساحة = $\frac{١}{٤}$ (π) (١٠)^{٢} = ٢٥ π وحدة مربعة

(٥)

$\int_{٠}^{٢}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ء س

ص = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ منها س^{٢} + ص^{٢} = ٤

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢

المساحة المظللة عبارة عن

٣ ش د + ح − المثلث ب د أ ب

ح د = $\frac{١}{٢}$ د ب ∴ ش (د ح ب د) = ٢٠$^{\circ}$

ومنها ش (د أ ب) = ٣٠$^{\circ}$

المساحة المظللة

= $\frac{١}{٣}$ القاعدة × الارتفاع + $\frac{١}{٢}$ طا ٣٠$^{\circ}$ × ق^{٢}

= $\frac{١}{٣}$ × ٢ × $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ (٢)^{٢} × $\frac{١}{٦}$ π

= ($\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ + $\frac{π}{٦}$) وحدة مساحة

٦

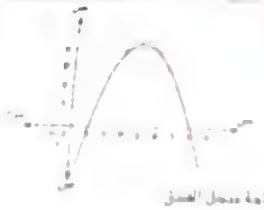
(١) ١٠٠	(٢) ١٠٠	(٣) ١٠٠	(٤) ١٠٠	(٥) ١٠٠
(٦) ١٠٠	(٧) ١٠٠	(٨) ١٠٠	(٩) ١٠٠	(١٠) ١٠٠
(١١) ١٠٠	(١٢) ١٠٠	(١٣) ١٠٠	(١٤) ١٠٠	(١٥) ١٠٠
(١٦) ١٠٠	(١٧) ١٠٠	(١٨) ١٠٠	(١٩) ١٠٠	(٢٠) ١٠٠
(٢١) ١٠٠	(٢٢) ١٠٠	(٢٣) ١٠٠	(٢٤) ١٠٠	(٢٥) ١٠٠
(٢٦) ١٠٠	(٢٧) ١٠٠	(٢٨) ١٠٠	(٢٩) ١٠٠	(٣٠) ١٠٠

٧

المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ (س − ٢) ء س

= [$\frac{١}{٢}$ (س − ٢)^{٢}]$_{٠}^{٢}$ = ٢ وحدات مربعة

٨



مساحة منحنى الفصل

= $\int_{٠}^{٦}$ − $\frac{١}{٢}$ (س − ١) (س − ٧) ء س

= $\int_{٠}^{٦}$ $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} − ٨ س + ٧) ء س

= $\frac{١}{٢}$ [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٧ س]$_{٠}^{٦}$ = ١٨ متر مربع

∴ تكلفة العمل = ١٨ × ١٥٠٠ = ٢٧٠٠٠ جنيهًا.

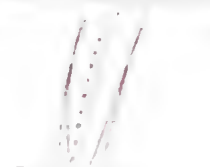
٩

مساحة الجزء المظلل = $\int_{٠}^{٢}$ [(٢ − س) − $\frac{١}{٢}$ س] ء س

= [٢ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٤}$ س^{٢}]$_{٠}^{٢}$

= ٢ − $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ وحدة مساحة

١٠



المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ ٢ س^{٢} − (س^{٣} − ٢ س^{٢}) ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ (−س^{٣} + ٤ س^{٢}) ء س

= [−$\frac{١}{٤}$ س^{٤} + $\frac{٤}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ = $\frac{١٢٨}{١٢}$ بيسة

∴ المساحة اللازمة من الورق اللاصق لأشياء

١٠٠٠ ملصق = ١٠٠٠ × $\frac{١٢٨}{١٢}$ = $\frac{٣٢٠٠٠}{٣}$ بيسة

١١

المساحة = $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) ء س

= [$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

١٢

المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ (س − ٢) ء س

= [$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٢ س]$_{٠}^{٢}$

= [$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٢ س]$_{٠}^{٢}$

= ٢ − ٤ = −٢ وحدة مربعة

∴ المساحة = $\int_{٠}^{٤}$ ص ءس

= $\int_{٠}^{٤} \frac{١}{١٦}$ س^{٢} ءس = $\frac{١}{١٦}$ [$\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{٤}$

= $\frac{١}{١٦}$ × (٦٤)^{٢} = ٤٨ وحدة مربعة

حل آخر :

∵ المساحة = $\int_{٠}^{٤}$ ص ءس

، عند س = ٠ فإن ن = ٠

، عند س = ٤ فإن ن = ٢

∴ المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ ص $\frac{ءس}{ءن}$ ءن

= $\int_{٠}^{٢}$ (٣ ن^{٢} × ١٦) ءن

= ١٨ $\int_{٠}^{٢}$ ن^{٢} ءن

= ١٨ × [$\frac{١}{٣}$ ن^{٣}]$_{٠}^{٢}$ = ٤٨ وحدة مربعة

③ ∵ ص = $\int_{٠}^{٤}$ [$\frac{١}{٤}$ س^{٢} ءس = $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

∴ ص = $\int_{٠}^{٤}$ (٢ $\sqrt{س}$ − $\frac{١}{٤}$ س^{٢}) ءس

= $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

، ∵ مساحة المربع = ٤ × ٤ = ١٦ وحدة مربعة

∴ ص = ١٦ − ($\frac{١٦}{٣}$ − $\frac{١٦}{٣}$) = $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

∴ ص$_{١}$: ص$_{٢}$: ص$_{٣}$ = $\frac{١٦}{٣}$: $\frac{١٦}{٣}$: $\frac{١٦}{٣}$

= ١ : ١ : ١

⑦ إيجاد نقط التقاطع بضع جاس = جا ٢ س

∴ ٢ جاس جتاس − جاس = ٠

∴ جاس (٢ جتاس − ١) = ٠

∴ جاس = ٠ ، جتاس = $\frac{١}{٢}$ ، س = π

أو ٢ جتاس − ١ = ٠

∴ جتاس = $\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{π}{٣}$

ص = $\int_{٠}^{\frac{π}{٣}}$ (جا ٢ س − جاس) ءس

= [$\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + جتاس]$_{٠}^{\frac{π}{٣}}$

= $\frac{١}{٢}$ جتا $\frac{٢π}{٣}$ + جتا $\frac{π}{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ − ١

= −$\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ − ١

= −$\frac{١}{٤}$ − ٢

= $\frac{٩}{٤}$

ص = $\int_{٠}^{\frac{π}{٣}}$ (جاس − جا ٢ س) ءس

= [−جتاس + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س]$_{٠}^{\frac{π}{٣}}$

∴ ص = $\frac{٩}{٤}$ − ١ = $\frac{٥}{٤}$

⑧

نفرض أن د (ق) = ٦ ق^{٢}

∴ المساحة (ص) = $\int_{٠}^{ق}$ (٦ ق^{٢} − ٦ س^{٢}) ءس

= $\int_{٠}^{ق}$ (٦ س^{٢} − ٦ ق^{٢}) ءس

= [٦ ق^{٢} س − ٢ س^{٣}]$_{٠}^{ق}$

= [٢ س^{٣} − ٦ ق^{٢} س]$_{٠}^{ق}$

= (٦ ق^{٣} − ٢ ق^{٣}) − (٦ ق^{٣} − ٢)

= (٥٤ − ١٨ ق^{٢}) − (٢ ق^{٣} − ٦ ق^{٢})

= (٤ ق^{٢} − ٦ ق^{٢} + ٢) + (٥٤ − ١٨ ق^{٢} + ٦ ق^{٢})

= ٨ ق^{٢} − ٢٤ ق^{٢} + ٥٦

∴ $\frac{ءص}{ءق}$ = ٢٤ ق^{٢} − ٨ ق

وبوضع $\frac{ءص}{ءق}$ = صفر ∴ ق = ٢

، $\frac{ء$^{٢}ص}{ءق^{٢}}$_{ق=٢}$ = ٤٨ ق − ١٦ > صفر

عند ق = ٢ تكون المساحة أصغر ما يمكن

⑨ ∵ مساحة شبه المنحرف

أ ب جـ د

= $\frac{١}{٢}$ (٢ + ٦) × ٤

١٦ وحدة مربعة

، ∵ ص = ١٣ وحدة مربعة

∴ ص = ١٦ − ١٣ = ٣ وحدة مربعة

، ∵ منحنى د$^{-١}$(س) هو منحنى د(س)

بالانعكاس حول المستقيم ص = س

∴ ص = ص = ٣ وحدة مربعة

∴ $\int_{٠}^{٣}$ د$^{-١}$(س) ءس = س ص − $\int_{٠}^{٣}$ ص ءس

١٣ + ٣ × ٣ = ١٩ وحدة مربعة

⑩ ∵ $\frac{ص_{٢}}{ص_{١}}$ = $\frac{٩}{٤}$

∴ $\frac{\int_{٠}^{٣}$ (٤ ص − س) ءس}{\int_{٠}^{٣}$ (٩ ص − س) ءس} = $\frac{٩}{٤}$

$\frac{\int_{٠}^{٣}$ (٤ ص − س) ءس}{\int_{٠}^{٣}$ (٩ ص − س) ءس} = $\frac{\int_{٠}^{٣}$ (٤ ص − س) ءس}{\int_{٠}^{٣}$ (٤ ص − س) ءس + \int_{٠}^{٣}$ ٥ ص ءس} = $\frac{٩}{٤}$

∴ $\frac{\int_{٠}^{٣}$ ص ءس}{\int_{٠}^{٣}$ ص ءس} = $\frac{٩}{٤}$ ∴ $\frac{٥}{٤}$ = ٢

⑪ نفرض د(س) = عدد س = جـ ∈ [٠ ، ٦]

∴ $\int_{٠}^{٦}$ د(س) ءس = ٢

∴ $\int_{٠}^{٦}$ −د(س) ءس = −٢ ∴ $\int_{٠}^{جـ}$ د(س) ءس = −٢

، ∴ $\int_{٠}^{٦}$ د(س) = ٢ ∴ $\int_{جـ}^{٦}$ د(س) = ٢٢

∴ $\int_{٠}^{٦}$ د(س) ءس = ٢٠ ∴ $\int_{٠}^{جـ}$ د(س) = ١٣

∴ $\int_{٠}^{٦}$ |د(س)| ءس = ١٣ ∴ $\int_{٠}^{٦}$ د(س) − $\int_{٠}^{جـ}$ د(س) = ١٣

، ∴ د(٦) = ١٥

∴ د(٠) = ٢ ، د(جـ) = ٢٢ ، د(٦) = ١٥

∴ أكبر قيمة للدالة د في الفترة [٠ ، ٦] = ٢٢

⑫ نفرض أي شكل للمنحنى

د(س) كما بالشكل المقابل

∴ $\int_{٠}^{٤}$ د(س) ءس

= المساحة تحت المنحنى

، في محصورة بين

مساحتي المستطيلين

أ ب جـ د ، أ ب ع ق

∴ ٥ × (١ − ٠) < $\int_{٠}^{٤}$ د(س) ءس < ٨ × (٤ − ١)

∴ ١٥ < $\int_{٠}^{٤}$ د(س) ءس < ٢٤

∴ $\int_{٠}^{٤}$ د(س) ءس ∈]١٥ ، ٢٤[

⑬ نفرض النقطة أ (س ، ص)

∴ مساحة المستطيل (م)

= ٢ س × ص

= ٢ س (١٢ − س^{٢})

= ٢٤ س − ٢ س^{٣}

∴ $\frac{ءم}{ءس}$ = ٢٤ − ٦ س^{٢}

وبوضع $\frac{ءم}{ءس}$ = ٠

∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ٢

، ∴ $\frac{ء$^{٢}م}{ءس^{٢}}$_{س=٢}$ = −١٢ س < ٠ عند س = ٢

∴ مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عند س = ٢

ومنها ص = ٨

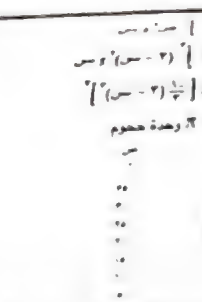
∴ مساحة الجزء المظلل

= $\int_{٠}^{٢}$ (١٢ − س^{٢} − ٨) ءس

= $\int_{٠}^{٢}$ (٤ − س^{٢}) ءس

= [٤ س − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ = $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

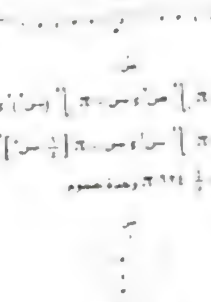
①



الحجم = π $\int_{٠}^{٢}$ (ص)^{٢} ءس = π $\int_{٠}^{٢}$ س^{٢} ءس

= π [$\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ = $\frac{٨}{٣}$ π وحدة حجوم

②

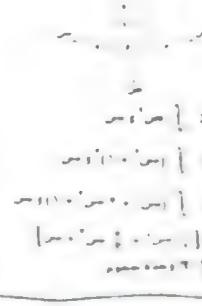


الحجم = π $\int_{٠}^{٢}$ (٢ س + ١)^{٢} ءس

= π [$\frac{١}{٢}$ (٢ س + ١)^{٣}]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{٢٦}{٣}$ π وحدة حجوم

③

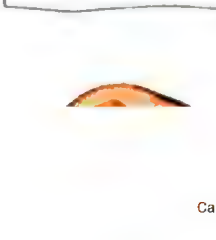


الحجم = π $\int_{٠}^{٢}$ (٣ − س)^{٢} ءس

= π [$\frac{١}{٣}$ (٣ − س)^{٣}]$_{٠}^{٢}$

= ٩ π وحدة حجوم

④



الحجم = π $\int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ءس = π $\int_{٠}^{٢}$ (س^{٢})^{٢} ءس

= π $\int_{٠}^{٢}$ س^{٤} ءس = π [$\frac{١}{٥}$ س^{٥}]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{٣٢}{٥}$ π وحدة حجوم

⑤

الحجم = π $\int_{٠}^{١}$ ص^{٢} ءس

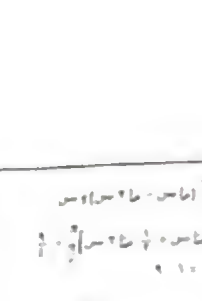
= π $\int_{٠}^{١}$ (س + ١)^{٢} ءس

= π $\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} + ٢ س + ١) ءس

= π [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س^{٢} + س]$_{٠}^{١}$

= $\frac{١٣}{٣}$ π وحدة حجوم

⑥



الحجم = π $\int_{٠}^{١}$ ص^{٢} ءس

= π $\int_{٠}^{١}$ (س + ١)^{٢} ءس

= π $\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} + ٢ س + ١) ءس

= π [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س^{٢} + س]$_{٠}^{١}$

= $\frac{١٣}{٣}$ π وحدة حجوم

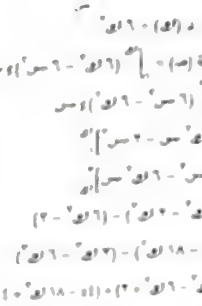
⑦

الحجم = π $\int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ءس = π $\int_{٠}^{٢}$ (٢ $\sqrt{س}$)^{٢} ءس

= π $\int_{٠}^{٢}$ ٤ س ءس = π [٢ س^{٢}]$_{٠}^{٢}$

= ٨ π وحدة حجوم

⑧



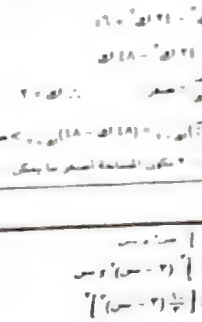
الحجم = π $\int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ءس = π $\int_{٠}^{٢}$ (٤ − س^{٢})^{٢} ءس

= π $\int_{٠}^{٢}$ (١٦ − ٨ س^{٢} + س^{٤}) ءس

= π [١٦ س − $\frac{٨}{٣}$ س^{٣} + $\frac{١}{٥}$ س^{٥}]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{٢٥٦}{١٥}$ π وحدة حجوم

⑨



الحجم = π $\int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ءس = π $\int_{٠}^{٢}$ (س + ٥)^{٢} ءس

= π [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٢٥ س]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{٢٦٢}{٣}$ π وحدة حجوم

⑩

الحجم = π $\int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ءس = π $\int_{٠}^{٢}$ (س + ١)^{٢} ءس

= π $\int_{٠}^{٢}$ (س^{٢} + ٢ س + ١) ءس

= π [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س^{٢} + س]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{١٤}{٣}$ π وحدة حجوم

⑪

الحجم = π $\int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ءس = π $\int_{٠}^{٢}$ (س^{٢} + ١)^{٢} ءس

= π $\int_{٠}^{٢}$ (س^{٤} + ٢ س^{٢} + ١) ءس

= π [$\frac{١}{٥}$ س^{٥} + $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + س]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{٢٦}{١٥}$ π وحدة حجوم

الحجم = $\pi \int_{٠}^{١} (-\text{س})^{٢}\,\text{ءس} + \pi \int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \pi \int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{١} + \pi \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{١}^{٢}$

$= \frac{١}{٣}\pi + \frac{٧}{٣}\pi = \frac{٨}{٣}\pi$ وحدة حجوم.

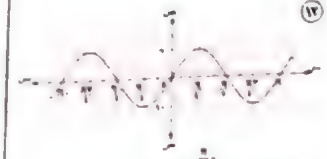
حل آخر:

الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس} = \pi \int_{٠}^{٢} (\sqrt{\text{س}})^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{٢} \text{س}\,\text{ءس} = \pi \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{٢}$

$= ٢\pi$ وحدة حجوم

⑫



الحجم = $\pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٢}\,٢\text{س}\,\text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,٤\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٨}\,\text{جا}\,٤\text{س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

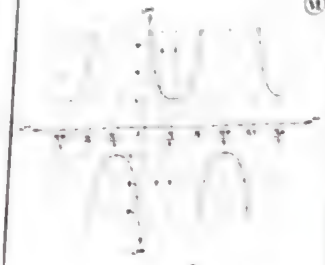
$= \frac{١}{٤}\pi$ وحدة حجوم

⑬

الحجم = $\pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس} = \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{قا}^{٢}\,\text{س}\,\text{ءس}$

$= \pi \left[\text{ظا}\,\text{س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = \pi$ وحدة حجوم

⑭



الحجم = $\pi \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{قا}^{٢}\,\text{س}\,\text{ءس}$

$= \pi \left[-\text{ظا}\,\text{س}\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= \pi$ وحدة حجوم

٤

①

ص = س

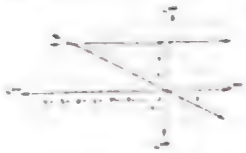
∴ س = ص

∴ الحجم = $\pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءص}$

$= \pi \int \text{ص}^{٢}\,\text{ءص} = \pi \left[\frac{١}{٣}\text{ص}^{٣}\right]$

$= \frac{١}{٣}\pi$ وحدة حجوم.

②



س + ٢ ص = ٠ ∴ س = −٢ ص

∴ الحجم = $\pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءص}$

$= \pi \int ٤\,\text{ص}^{٢}\,\text{ءص}$

$= \pi \left[\frac{٤}{٣}\text{ص}^{٣}\right] = \frac{٣٢}{٣}\pi$ وحدة حجوم.

③

ص = س^{٢} تقطع الصادات في صفر

الحجم = $\pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءص} = \pi \int \text{ص}\,\text{ءص}$

$= \pi \left[\frac{١}{٢}\text{ص}^{٢}\right] = ٣٢\pi$ وحدة حجوم.

④

ص = س − ١

∴ س = ص + ١ تقطع الصادات في ١

∴ الحجم = $\pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءص}$

$= \pi \int (\text{ص} - ١)^{٢}\,\text{ءص}$

$= \pi \left[\frac{١}{٣}(\text{ص} - ١)^{٣}\right]$

$= ٨\pi$ وحدة حجوم

⑤

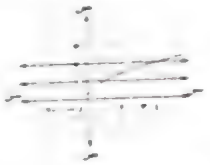
ص = س^{٣}

∴ س = ص$^{\frac{١}{٣}}$ (تقطع الصادات في صفر)

∴ الحجم = $\pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءص} = \pi \int \text{ص}^{\frac{٢}{٣}}\,\text{ءص}$

$= \pi \left[\frac{٣}{٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٣}}\right] = \frac{٣٢}{٥}\pi$ وحدة حجوم.

⑥

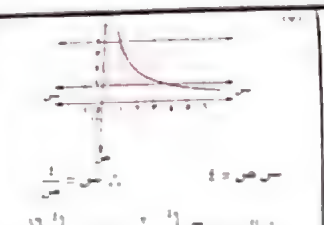


ص = $\sqrt{\text{س}}$ ∴ س = ص^{٢}

∴ الحجم = $\pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءص} = \pi \int \text{ص}^{٤}\,\text{ءص}$

$= \pi \left[\frac{١}{٥}\text{ص}^{٥}\right] = \frac{٣٢}{٥}\pi$ وحدة حجوم.

⑦



الحجم = $\pi \int_{٠}^{١} (\text{س} - \text{س}^{٢})^{٢}\,\text{ءس} + \pi \int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \pi \int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{١} + \pi \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{١}^{٢}$

$= \frac{١}{٣}\pi + \frac{٧}{٣}\pi = ٢\pi$ وحدة حجوم.

حل آخر:

الحجم = $\pi \int_{٠}^{١} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس} = \pi \int_{٠}^{١} (\sqrt{\text{س}})^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{١} \text{س}\,\text{ءس} = \pi \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{١}$

$= ٢\pi$ وحدة حجوم

⑧

الحجم = $\pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$

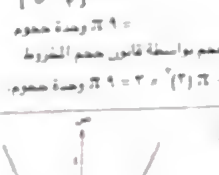
$= \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٢}\,٢\text{س}\,\text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,٤\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٨}\,\text{جا}\,٤\text{س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{١}{٤}\pi$ وحدة حجوم

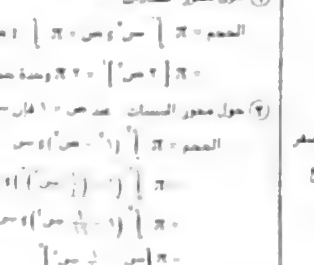
⑨



الحجم = $\pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس} = \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{قا}^{٢}\,\text{س}\,\text{ءس}$

$= \pi \left[\text{ظا}\,\text{س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = \pi$ وحدة حجوم

⑩



الحجم = $\pi \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$

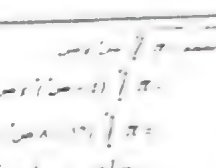
$= \pi \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{قا}^{٢}\,\text{س}\,\text{ءس}$

$= \pi \left[-\text{ظا}\,\text{س}\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= \pi$ وحدة حجوم

٥

①



س ص = ٤ ∴ ص = $\frac{٤}{\text{س}}$

∴ الحجم = $\pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءص} = \pi \int \frac{١٦}{\text{ص}}\,\text{ءص}$

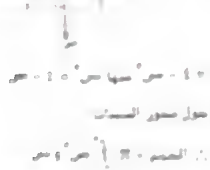
$= \pi \int ١٦\,\text{ص}^{-١}\,\text{ءص}$

$= \pi \left[-١٦\,\text{ص}^{-١}\right]$

$= ١٦\pi$ وحدة حجوم.

② $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ١$ ∴ $\sqrt{\text{س}} = ١ - \sqrt{\text{ص}}$

∴ ص = $(١ - \sqrt{\text{ص}})^{٢}$ تقطع الصادات في ١



∴ الحجم = $\pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءص}$

$= \pi \int (١ - \sqrt{\text{ص}})^{٢}\,\text{ءص}$

بوضع $١ - \sqrt{\text{ص}} = \text{ع}$ ∴ $\sqrt{\text{ص}} = ١ - \text{ع}$

∴ ص = $(١ - \text{ع})^{٢}$

∴ ءص = $-٢(١ - \text{ع})\,\text{ءع}$

ص = ٠ فإن ع = ١ ، ص = ١ فإن ع = صفر

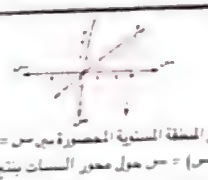
∴ الحجم = $\pi \int_{١}^{٠} \text{ع}^{٢} \times -٢(١ - \text{ع})\,\text{ءع}$

$= \pi \int_{٠}^{١} (-٢\,\text{ع}^{٢} + ٢\,\text{ع}^{٣})\,\text{ءع}$

$= \pi \left[-\frac{٢}{٣}\text{ع}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{ع}^{٤}\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{١}{٦}\pi$ وحدة حجوم

٦



سوران المنطقة المستوية المحصورة بين س = ٠ ، س = ٣ ، د (س) = س حول محور السينات ينتج مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٣ وحدات طول وارتفاعه ٣ وحدات طول.

∴ حجمه بالتكامل = $\pi \int \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

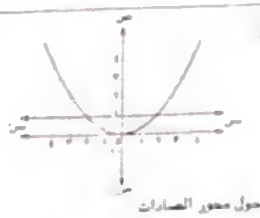
$= \pi \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]$

$= ٩\pi$ وحدة حجوم

، الحجم بواسطة قانون حجم المخروط

$= \frac{١}{٣}\pi(٣)^{٢} \times ٣ = ٩\pi$ وحدة حجوم.

٧



① حول محور الصادات

الحجم = $\pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءص} + \pi \int ١\,\text{ءص}$

$= \pi \left[٢\,\text{ص}^{٢}\right] = ٢\pi$ وحدة حجوم

② حول محور السينات عند ص = ١ فإن س = ٢

الحجم = $\pi \int (١^{٢} - \text{ص}^{٢})\,\text{ءس}$

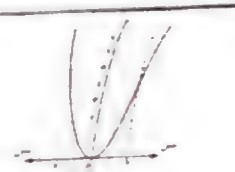
$= \pi \int \left(١ - \left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢}\right)\text{ءس}$

$= \pi \int \left(١ - \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}\right)\text{ءس}$

$= \pi \left[\text{س} - \frac{١}{١٢}\text{س}^{٣}\right]$

$= \frac{٤}{٣}\pi$ وحدة حجوم

٨



① حول محور السينات

∴ ص = س^{٢} تقطع محور السينات في صفر

∴ الحجم = $\pi \int \text{ص}^{٢}\,\text{ءس} = \pi \int \text{س}^{٤}\,\text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{١}{٥}\text{س}^{٥}\right] = \frac{٣٢}{٥}\pi$ وحدة حجوم.

② حول محور الصادات

عند س = ٢ فإن ص = ٤

∴ الحجم = $\pi \int (٤ - \text{س}^{٢})^{٢}\,\text{ءص}$

$= \pi \int (٤ - \text{ص})\,\text{ءص}$

$= \pi \left[٤\,\text{ص} - \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢}\right]$

$= ٨\pi$ وحدة حجوم

٩

ص = ٤ − س^{٢} تقطع محور الصادات في ٤

① حول محور السينات

∴ الحجم = $\pi \int \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int (٤ - \text{س}^{٢})^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int (١٦ - ٨\,\text{س}^{٢} + \text{س}^{٤})\,\text{ءس}$

$= \pi \left[١٦\,\text{س} - \frac{٨}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٥}\text{س}^{٥}\right]$

$= \frac{٢٥٦}{١٥}\pi$ وحدة حجوم

٧

ص = ٤ − س^{٢} تقطع محور الصادات في ٤

① حول محور السينات

∴ الحجم = $\pi \int \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int (٤ - \text{س}^{٢})^{٢}\,\text{ءس}$

$= \pi \int (١٦ - ٨\,\text{س}^{٢} + \text{س}^{٤})\,\text{ءس}$

$= \pi \left[١٦\,\text{س} - \frac{٨}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٥}\text{س}^{٥}\right]$

$= \frac{٢٥٦}{١٥}\pi$ وحدة حجوم

② حول محور الصادات

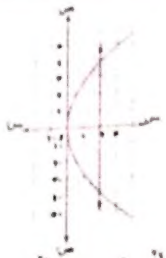
الحجم = $\pi \int \text{س}^{٢}\,\text{ءص}$

$= \pi \int (٤ - \text{ص})\,\text{ءص}$

$= \pi \left[٤\,\text{ص} - \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢}\right]$

$= ٨\pi$ وحدة حجوم

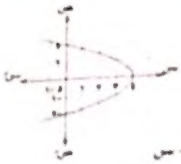
٨



الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢}$ ص$_٢^٢$ ء س = $\pi \int_{٠}^{٢}$ ٨ س ء س

= $\pi \left[٤ \text{ س}^٢ \right]_{٠}^{٢}$ = ١٦ π وحدة حجوم

٩



ص$_٢^٢$ = ٤ − س

① حول محور السينات

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٤}$ ص$_٢^٢$ ء س

= $\pi \int_{٠}^{٤}$ (٤ − س) ء س

= $\pi \left[٤ \text{ س} - \frac{١}{٢} \text{ س}^٢ \right]_{٠}^{٤}$

= ٨ π وحدة حجوم

② حول محور الصادات

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢}$ س$_٢^٢$ ء ص

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (٤ − ص$_٢^٢$) ء ص

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (١٦ − ٨ ص$_٢^٢$ + ص$_٢^٤$) ء ص

= $\pi \left[١٦ \text{ ص} - \frac{٨}{٣} \text{ ص}_٢^٣ + \frac{١}{٥} \text{ ص}_٢^٥ \right]_{٠}^{٢}$

= $\frac{٢٥٦}{١٥}$ π وحدة حجوم

١٠

①

د (س) = ١ − س^٢ يقطع محور السينات في −١ ، ١

∴ الحجم = $\pi \int_{-١}^{١}$ ص$_٢^٢$ ء س

= $\pi \int_{-١}^{١}$ (١ − س^٢)^٢ ء س

= $\pi \int_{-١}^{١}$ (١ − ٢ س^٢ + س^٤) ء س

= $\pi \left[\text{س} - \frac{٢}{٣} \text{ س}^٣ + \frac{١}{٥} \text{ س}^٥ \right]_{-١}^{١}$

= $\frac{١٦}{١٥}$ π وحدة حجوم.

②

د (س) = ٢ س − س^٢ يقطع محور السينات في صفر ، ٢

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢}$ ص$_٢^٢$ ء س

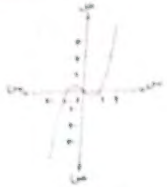
= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (٢ س − س^٢)^٢ ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (٤ س^٢ − ٤ س^٣ + س^٤) ء س

= $\pi \left[\frac{٤}{٣} \text{ س}^٣ - \text{س}^٤ + \frac{١}{٥} \text{ س}^٥ \right]_{٠}^{٢}$

= $\frac{١٦}{١٥}$ π وحدة حجوم

②



د (س) = س^٢ − س يقطع محور السينات في صفر ، ١ ، −١

∴ الحجم = $\pi \int_{-١}^{١}$ ص$_٢^٢$ ء س

= $\pi \int_{-١}^{١}$ (س^٢ − س)^٢ ء س

= $\pi \int_{-١}^{١}$ (س^٤ − ٢ س^٣ + س^٢) ء س

= $\pi \left[\frac{١}{٥} \text{ س}^٥ - \frac{٢}{٤} \text{ س}^٤ + \frac{١}{٣} \text{ س}^٣ \right]_{-١}^{١}$

= $\frac{١٦}{١٥}$ π وحدة حجوم.

١١

ص$_١$ = ١ ، ص$_٢$ = س^٢

∵ ص$_١$ ≤ ص$_٢$ في الفترة [٠ ، ١]

∴ الحجم = $\int_{٠}^{١}$ (ص$_١^٢$ − ص$_٢^٢$) ء س

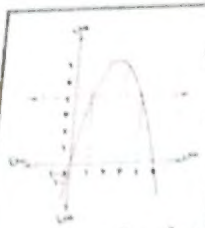
= $\pi \int_{٠}^{١}$ (١ − س^٢) ء س

= $\pi \left[\text{س} - \frac{١}{٣} \text{ س}^٣ \right]_{٠}^{١}$ = $\frac{٢}{٣}$ π وحدة حجم.

∵ π نق^٢ = ١٢ = $\frac{٢}{٣}$ π

∴ نق = $\frac{٦}{٢}$ وحدة طول.

١٢



ص$_١$ = ٥ س − س^٢

، ص$_٢$ = ١

يتقاطعا في س = ١

، س = ٤

∵ ص$_١$ ≥ ص$_٢$

في الفترة [١ ، ٤]

∴ الحجم = $\pi \int_{١}^{٤}$ (ص$_١^٢$ − ص$_٢^٢$) ء س

= $\pi \int_{١}^{٤}$ ((٥ س − س^٢)^٢ − ١^٢) ء س

= $\pi \int_{١}^{٤}$ (٢٥ س^٢ − ١٠ س^٣

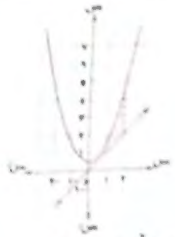
+ س^٤ − ١٦) ء س

= $\pi \left[\frac{٢٥}{٣} \text{ س}^٣ - \frac{١٠}{٤} \text{ س}^٤ + \frac{١}{٥} \text{ س}^٥ \right.$

$\left. - ١٦ \text{ س} \right]_{١}^{٤}$

= ١١٠,١ π وحدة حجوم.

١٣



ص$_١$ = $\frac{١}{٢}$ س^٢ ، ص$_٢$ = س

∵ ص$_١$ ≤ ص$_٢$ في الفترة [٠ ، ٢]

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢}$ (ص$_٢^٢$ − ص$_١^٢$) ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ ((س)^٢ − ($\frac{١}{٢}$ س^٢)^٢) ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (س^٢ − $\frac{١}{٤}$ س^٤) ء س

= $\pi \left[\frac{١}{٣} \text{ س}^٣ - \frac{١}{٢٠} \text{ س}^٥ \right]_{٠}^{٢}$

= ٦,٩ π وحدة حجوم

١٤

ص$_١$ = س^٢ ، ص$_٢$ = ٢ س

يتقاطعا عند س = ٠ ، س = ٢

، في هذه الفترة ص$_١$ ≤ ص$_٢$

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢}$ (ص$_٢^٢$ − ص$_١^٢$) ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ ((٢ س)^٢ − (س^٢)^٢) ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (٤ س^٢ − س^٤) ء س

= $\pi \left[\frac{٤}{٣} \text{ س}^٣ - \frac{١}{٥} \text{ س}^٥ \right]_{٠}^{٢}$

= $\frac{٣٢}{١٥}$ π وحدة حجوم.

١٥

ص$_١$ = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص$_٢$ = س^٢

يتقاطعا عند س = ٠ ، س = ١

∵ ص$_١$ ≤ ص$_٢$ في هذه الفترة

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{١}$ (ص$_٢^٢$ − ص$_١^٢$) ء س

= $\pi \int_{٠}^{١}$ (س − س^٤) ء س

= $\pi \left[\frac{١}{٢} \text{ س}^٢ - \frac{١}{٥} \text{ س}^٥ \right]_{٠}^{١}$

= $\frac{٣}{١٠}$ π وحدة حجوم.

١٦

ص$_٢^٢$ = ٨ س ، ص$_١$ = س^٢

يتقاطعا عند س = ٠ ، س = ٢

∵ ص$_١$ ≤ ص$_٢$ في هذه الفترة

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢}$ (ص$_٢^٢$ − ص$_١^٢$) ء س

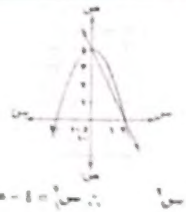
= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (٨ س − (س^٢)^٢) ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ ((٨ س − س^٤)) ء س

= $\pi \left[٤ \text{ س}^٢ - \frac{١}{٥} \text{ س}^٥ \right]_{٠}^{٢}$

= $\frac{١٨}{٥}$ π وحدة حجوم.

١٧



ص = ٤ − س^٢ ∴ س^٢ = ٤ − ص

، ٢ س + ص = ٤ ∴ س = ٢ − $\frac{١}{٢}$ ص

يتقاطعان عند س = ٠ ، ص = ٤

ويكون س ≤ س في الفترة [−٢ ، ٢]

∴ الحجم = $\pi \int_{-٢}^{٢}$ (س$_٢^٢$ − س$_١^٢$) ء ص

= $\pi \int_{-٢}^{٢}$ ((٤ − ص) − (٢ − $\frac{١}{٢}$ ص)^٢) ء ص

= $\pi \int_{-٢}^{٢}$ ($\frac{١}{٢}$ ص − $\frac{١}{٤}$ ص^٢) ء ص

= $\pi \left[\frac{١}{٤} \text{ ص}^٢ - \frac{١}{١٢} \text{ ص}^٣ \right]_{-٢}^{٢}$

= $\frac{٨}{٣}$ π وحدة حجوم.

١٨

س$_٢^٢$ = ٢ ص ، س$_١$ = ص^٢

يتقاطعا في ص = ٠ ، ص = $\sqrt{٢}$

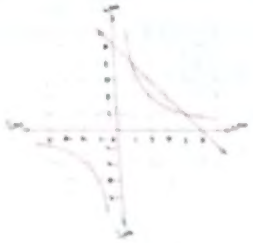
وفي هذه الفترة س$_٢$ ≤ س$_١$

الحجم = $\pi \int_{٠}^{\sqrt{٢}}$ (س$_٢^٢$ − س$_١^٢$) ء ص

= $\pi \int_{٠}^{\sqrt{٢}}$ (٢ ص − ص^٤) ء ص

= $\pi \left[\text{ص}^٢ - \frac{١}{٥} \text{ ص}^٥ \right]_{٠}^{\sqrt{٢}}$ = ٠,٩ π وحدة حجوم

١٩



ص$_١$ = $\frac{١}{س}$ ، ص$_٢$ = ٥ − س

يتقاطعا عند س = ١ ، س = ٤

ويكون ص$_١$ ≥ ص$_٢$ في هذه الفترة

∴ الحجم = $\pi \int_{١}^{٤}$ (ص$_١^٢$ − ص$_٢^٢$) ء س

= $\pi \int_{١}^{٤}$ (٥ − س)^٢ − ($\frac{١}{س}$)^٢ ء س

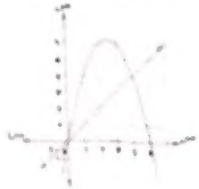
= $\pi \int_{١}^{٤}$ (٢٥ − ١٠ س + س^٢ − $\frac{١}{س^٢}$) ء س

= $\pi \left[٢٥ \text{ س} - ٥ \text{ س}^٢ + \frac{١}{٣} \text{ س}^٣ \right.$

$\left. - \frac{١}{س} \right]_{١}^{٤}$

= ٢٦,٥ $\int_{١}^{٤}$ = ٩ π وحدة حجوم

٢٠



ص$_١$ = ٥ س − س^٢ ، ص$_٢$ = س

يتقاطعا عند س = ٠ ، س = ٤

وفي هذه الفترة ص$_١$ ≥ ص$_٢$

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢} (\text{ص}_{٢}^{٢} - \text{ص}_{١}^{٢})$ ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢} (٢٥ - \text{س}^{٢})$ ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢} (١٦ - \text{س}^{٢})$ ء س

= $\pi \left[١٦\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} \right]_{٠}^{٢}$

= $\frac{٩٢}{٣}\pi$ وحدة حجم

٢٨

∴ الشكل متماثل حول محور الصادات

∴ الحجم = $٢\pi \int_{٠}^{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} \left(\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}\right)^{٢}$ ء س

= $٢\pi \int_{٠}^{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} (١ - \text{س}^{٢})$ ء س

= $٢\pi \int_{٠}^{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} (١ - \text{ص}^{٢})$ ء ص

= $٢\pi \left[\text{ص} - \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣} \right]_{٠}^{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

= $٢\pi \left[\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٨} \right]$

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}\pi$ وحدة حجم

٢٩

∴ ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = س

∴ المنحنيان يتقاطعان في س = ٠ ، س = ١

∴ س > ص في هذه الفترة

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{١} (\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢})$ ء س

= $\pi \int_{٠}^{١} (\text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٢})$ ء ص

= $\pi \left[\frac{١}{٥}\text{ص}^{٥} - \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣} \right]_{٠}^{١}$

= $\frac{٢}{١٥}\pi$ وحدة حجم

٣٠

ص = جا س ، ص = جتا س

∴ جا س > جتا س في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤} \right]$

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{جا س})^{٢} - (\text{جتا س})^{٢}$ ء س

= $\pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا ٢س}$ ء س

= $\pi \left[\frac{١}{٢} \text{جا ٢س} \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

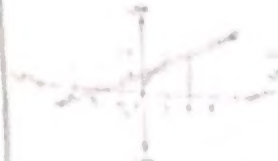
= $\frac{١}{٢}\pi$ وحدة حجم

٣١

(أ) ١	(ب) ٧	(ج) ٧	(د) ٤
(أ) ٢	(ب) ٧	(ج) ٨	(د) ٥
(أ) ١١	(ب) ١٢	(ج) ١٣	(د) ١٤
(أ) ١٥	(ب) ١٧	(ج) ١٨	(د) ٩
(أ) ١٩	(ب) ٢٠	(ج) ٢١	(د) ٢٢

٣٢

ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$



∴ ميل المماس عند النقطة (٠ ، ٠) = $\frac{١}{٣}$

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢} \text{ص}_{٢}^{٢}$ ء س ، ص = $\frac{١}{٢}$ س

= $\pi \int_{٠}^{٢} (\frac{١}{٢}\text{س})^{٢}$ ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢} \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}$ ء س

= $\pi \left[\frac{\frac{١}{٤}\text{س}^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{٢}$ ، $\pi \left[\frac{\text{س}^{٣}}{١٢} \right]_{٠}^{٢}$

= $\frac{٢}{٣}\pi$ ، $\frac{٢}{٣}\pi$ وحدة مكعبة

٣٣

س = ص = ٨ ∴ ص = ٨ − س

∴ ٢س = ٨ − س ∴ ص = $\frac{٨}{٣}$ س

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٨} (\text{ص}_{٢} - \text{س})^{٢}$ ء س + $\pi \int_{٠}^{٨} (\text{س})^{٢}$ ء س

= $\pi \int_{٠}^{٨} (٨ - \text{س})^{٢}$ ء س + $\pi \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} \right]_{٠}^{٨}$

= $\pi \left[\frac{١}{٣}(٨ - \text{س})^{٣} \right]_{٠}^{٨}$ + $\frac{٥١٢}{٣}\pi$

= ٣٢ π وحدة حجم

معادلة المستقيم أ ب :

$\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{٠ - ٤}{٤ - ٠}$

∴ ص = ٢ − س

∴ ص = س − ٢

∴ معادلة المستقيم ب جـ

$\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{٠ - ٤}{٨ - ٤}$

∴ ص = −٢ س + ٨

∴ معادلة المستقيم أ جـ

$\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{٠ - ٤}{٨ - ٠}$ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

∴ مساحة سطح المثلث أ ب جـ

= مساحة Δ أ ب د + مساحة المثلث د ب جـ

= $\int_{٠}^{٤} (\text{س} + ٢)$ ء س + $\int_{٤}^{٨} (\frac{١}{٢}\text{س} + ٢)$ ء س

= $\int_{٠}^{٤} (\text{س} + ٢)$ ء س + $\int_{٤}^{٨} (-\text{س} + ٨)$ ء س

= $\left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢\text{س} \right]_{٠}^{٤}$ + $\left[-\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٨\text{س} \right]_{٤}^{٨}$

= ١٢ + ١٢ = ٢٤ وحدة مساحة

(ب) لكل ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

∴ س = ٢ ص − ٤

∴ الحجم الناشئ عن دوران Δ أ ب جـ حول محور الصادات

= $\pi \int_{٠}^{٤} \text{س}_{٢}^{٢}$ ء ص = $\pi \int_{٠}^{٤} (٢\text{ص} - ٤)^{٢}$ ء ص

= $\pi \left[\frac{١}{٦}(٢\text{ص} - ٤)^{٣} \right]_{٠}^{٤}$ = ١٠٦ π وحدة حجم

٢٥

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$:

$\frac{ص - ٥}{س - ١} = \frac{٥ - ٠}{١ - ٢-}$

$= \frac{٥}{٣}$

∴ $ص_١ = \frac{٥}{٣}$ س + $\frac{١٠}{٣}$

، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$

$\frac{ص - ٥}{س - ١} = \frac{٥ - ٠}{١ - ٤} = \frac{٥-}{٣}$

∴ $ص_٢ = \frac{٥-}{٣}$ س + $\frac{٢٠}{٣}$

∴ الحجم = $\pi \int_{٢-}^{١} (ص_١)^٢ ء س + \pi \int_{١}^{٤} (ص_٢)^٢ ء س$

$= \pi \int_{٢-}^{١} \left(\frac{٥}{٣} س + \frac{١٠}{٣}\right)^٢ ء س$

$+ \pi \int_{١}^{٤} \left(\frac{٥-}{٣} س + \frac{٢٠}{٣}\right)^٢ ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٥}\left(\frac{٥}{٣} س + \frac{١٠}{٣}\right)^٣\right]_{٢-}^{١}$

$+ \pi \left[-\frac{١}{٥}\left(\frac{٥-}{٣} س + \frac{٢٠}{٣}\right)^٣\right]_{١}^{٤}$

$= ٢٥ \pi + ٢٥ \pi = ٥٠ \pi$ وحدة حجوم.

٢٦

① معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$:

$\frac{ص - ٢}{س - ٠} = \frac{٢ - ٤}{٠ - ٦} = \frac{١}{٣}$

∴ ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٢

② المنحنى د يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ عندما

$\frac{٩}{س} = \frac{١}{٣}$ س + ٢ ∴ ٢٧ = $س^٢$ + ٦ س

∴ $س^٢$ + ٦ س − ٢٧ = ٠

∴ س = −٩ (مرفوض) أو س = ٣

∴ ص = ٣ ∴ جـ = (٣ ، ٣)

③ ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٩-}{س^٢}$

∴ ميل المماس عند جـ = −١

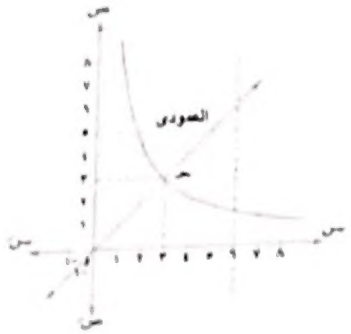
∴ ميل العمودي = $\frac{١-}{١-}$ = ١

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - ٣}{س - ٣}$ = ١

∴ س − ص = ٠

∴ يمر بنقطة الأصل

④



الحجم = $\pi \int_{٣}^{٦} س^٢ ء س + \pi \int_{٦}^{٩} \left(\frac{٩}{س}\right)^٢ ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٣} س^٣\right]_{٣}^{٦} + \pi \left[-٨١ س^{-١}\right]_{٦}^{٩}$

$= ٩ \pi + \pi \frac{٢٧}{٢} = \pi \frac{٤٥}{٢}$ وحدة حجوم.

٢٧

الحجم = $\pi \int_{١}^{ك} ص^٢ ء س = \pi \int_{١}^{ك} س ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٢} س^٢\right]_{١}^{ك} = \frac{\pi}{٢} (ك^٢ - ١)$

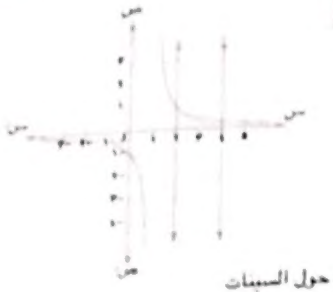
∴ $\frac{\pi}{٢} (ك^٢ - ١) = ١٢ \pi$

∴ $ك^٢ - ١ = ٢٤$ ∴ $ك^٢ = ٢٥$

∴ ك = ± ٥ ∵ ك > ١

∴ ك = ٥

٢٧



① حول السينات

∴ الحجم = $\pi \int_{٢}^{٤} \left(\frac{١}{س - ١}\right)^٢ ء س$

$= \pi \int_{٢}^{٤} (س - ١)^{-٢} ء س$

$= \pi \left[-(س - ١)^{-١}\right]_{٢}^{٤}$

$= \frac{٢}{٣} \pi$ وحدة مكعبة.

② حول الصادات عند س = ٢ ∴ ص = ١

، عند س = ٤ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$

$ص_١ = ١ + \frac{١}{ص}$ ، $ص_٢ = ٢$ ، $ص_٣ = ٤$

∴ الحجم = $\pi \int_{١/٣}^{١} (ص_٢^٢ - ص_١^٢) ء ص$

$+ \pi \int_{١}^{٢} (ص_٢^٢ - ص_٣^٢) ء ص$

$= \pi \int_{١/٣}^{١} (١٦ - ٤) ء ص$

$+ \pi \int_{١}^{٢} \left((١ + \frac{١}{ص})^٢ - ٤\right) ء ص$

$= \pi \int_{١/٣}^{١} ١٢ ء ص$

$+ \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{٢}{ص} + \frac{١}{ص^٢} - ٣\right) ء ص$

$= \pi \left[١٢ ص\right]_{١/٣}^{١}$

$+ \pi \left[٢ لو_هـ |ص| - \frac{١}{ص} - ٣ ص\right]_{١}^{٢}$

$= ٤ \pi + ٢ \pi لو_هـ ٢$

$= ٢ \pi (٢ + لو_هـ ٢)$ وحدة حجوم

٢٨

معادلة $\overleftrightarrow{جـ ء}$

$\frac{ص - ٢}{س - ٠} = \frac{٥ - ٢}{٠ - ٢-}$

∴ $\frac{ص - ٢}{س}$ = ١ ∴ ص = س + ٢

∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ $\frac{ص - ٠}{س - ٧} = \frac{٥ - ٠}{٧ - ٢} = ١-$

∴ ص = − س + ٧

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢} (س + ٢)^٢ ء س$

$+ \pi \int_{٢}^{٧} (- س + ٧)^٢ ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٣} (س + ٢)^٣\right]_{٠}^{٢}$

$+ \pi \left[\frac{١}{٣} (- س + ٧)^٣\right]_{٢}^{٧}$

$= \frac{٨}{٣} \pi + \frac{١٢٥}{٣} \pi = \frac{١٣٣}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

• معادلة $\overleftrightarrow{ب ء}$ هي $\frac{س}{٧} + \frac{ص}{٢}$ = ١

∴ ص = $\frac{٢-}{٧}$ س + ٢

∴ الحجم الناشئ من دوران Δ ب جـ ء حول محور السينات

= $\frac{١٣٣}{٣} \pi$ − الحجم الناشئ من دوران Δ ب جـ ء

= $\frac{١٣٣}{٣} \pi - \pi \int_{٠}^{٧} \left(\frac{٢}{٧} س + ٢\right)^٢ ء س$

= $\frac{١٣٣}{٣} \pi - \pi \left[\frac{٧}{٦} \left(\frac{٢}{٧} س + ٢\right)^٣\right]_{٠}^{٧}$

= $\frac{١٣٣}{٣} \pi - ٢١ \pi = \frac{١٠}{٣} \pi$ وحدة حجوم

التفاضل و التكامل

الرياضيات البحتة

الآن بالمكتبات

المعاصر في:

- الجبر و الهندسة الفراغية
- الاستاتيكا
- الديناميكا
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية

الجزء الخاص بالإجابات

يصرف مجاناً مع الكتاب

مكتبة الطلبة

للطباعة والنشر والتوزيع

٣ شارع كامل صدقي - الفجالة

تليفون ٢٥٩٢٩٢٢ - ٢٥٩٢٩٢٤ - ٢٥٩٢٩٢٤/١

E-mail: ...@almoasserbooks.com

www.almoasserbooks.com

الرقم السلعي ١٥٠١٤

6 223007 310611

/ElMoasser.eg